



复杂性思维

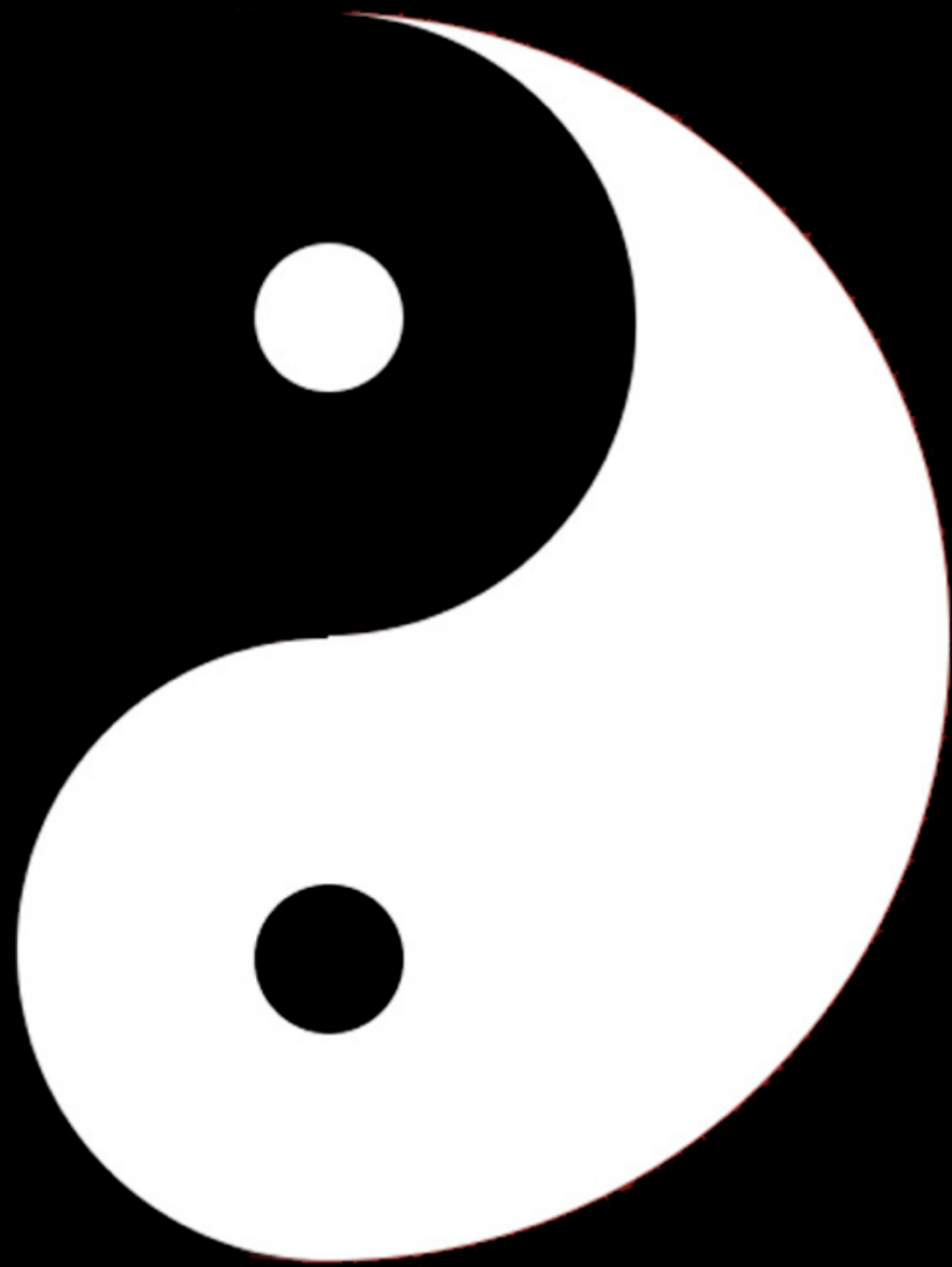
层级与自指

张江

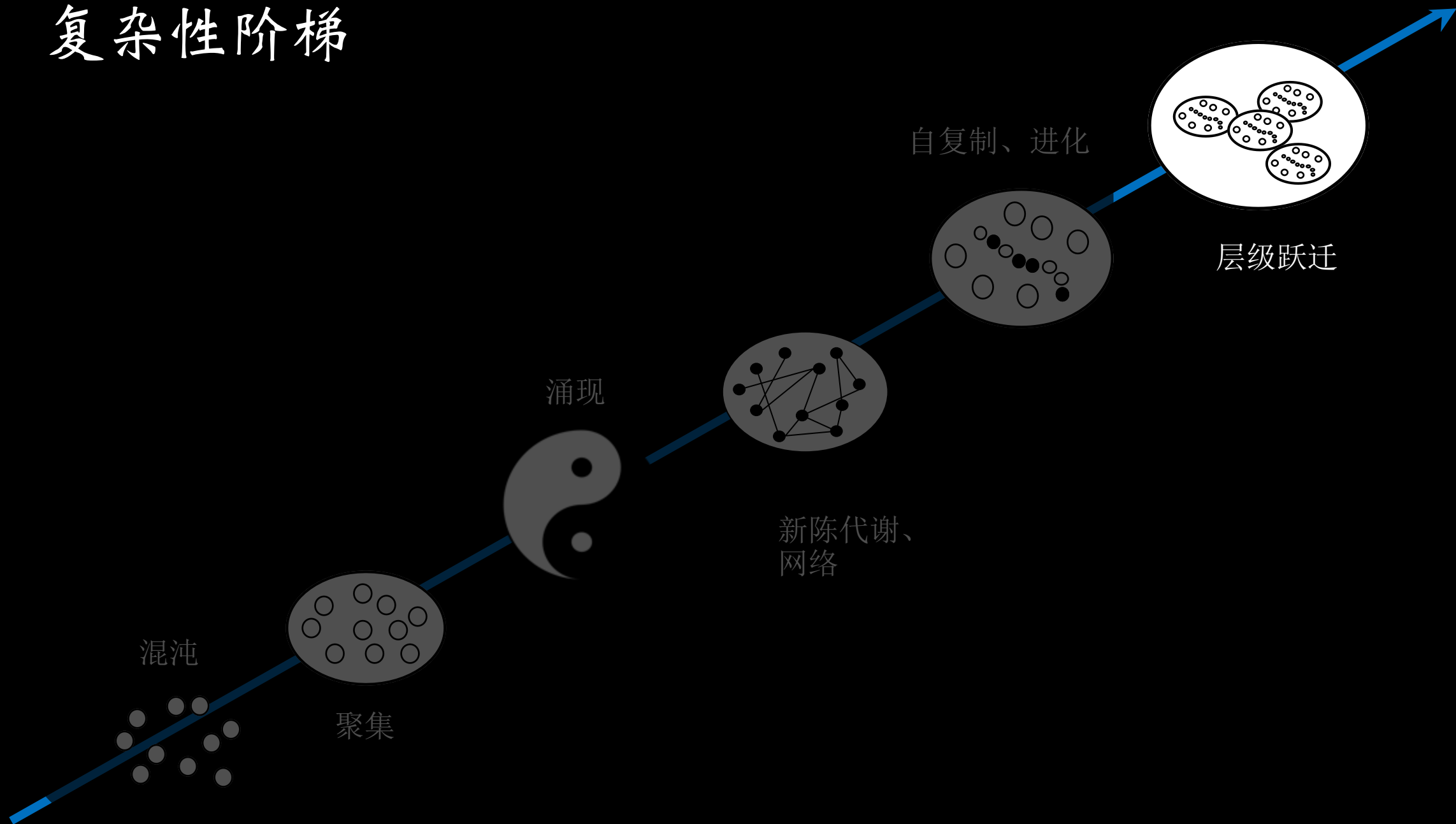
北京师范大学系统科学学院

集智俱乐部

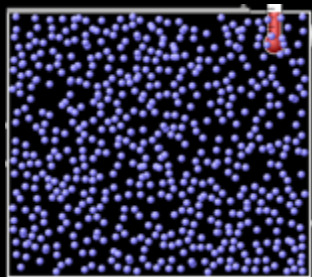
集智学园



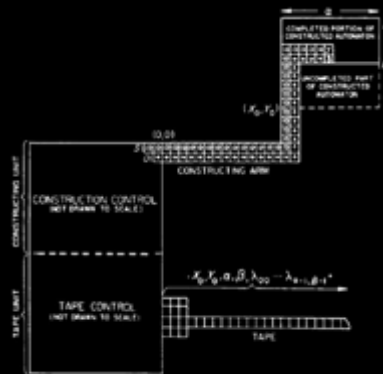
复杂性阶梯



遗留问题



热力学耗散



复杂度阈值：自复制



达尔文进化的世界

复杂度

自指

摄像机-电视实验





自指不仅仅是反馈

- 自指=跨越层次的反馈
- 层次、反馈、不动点

今日内容

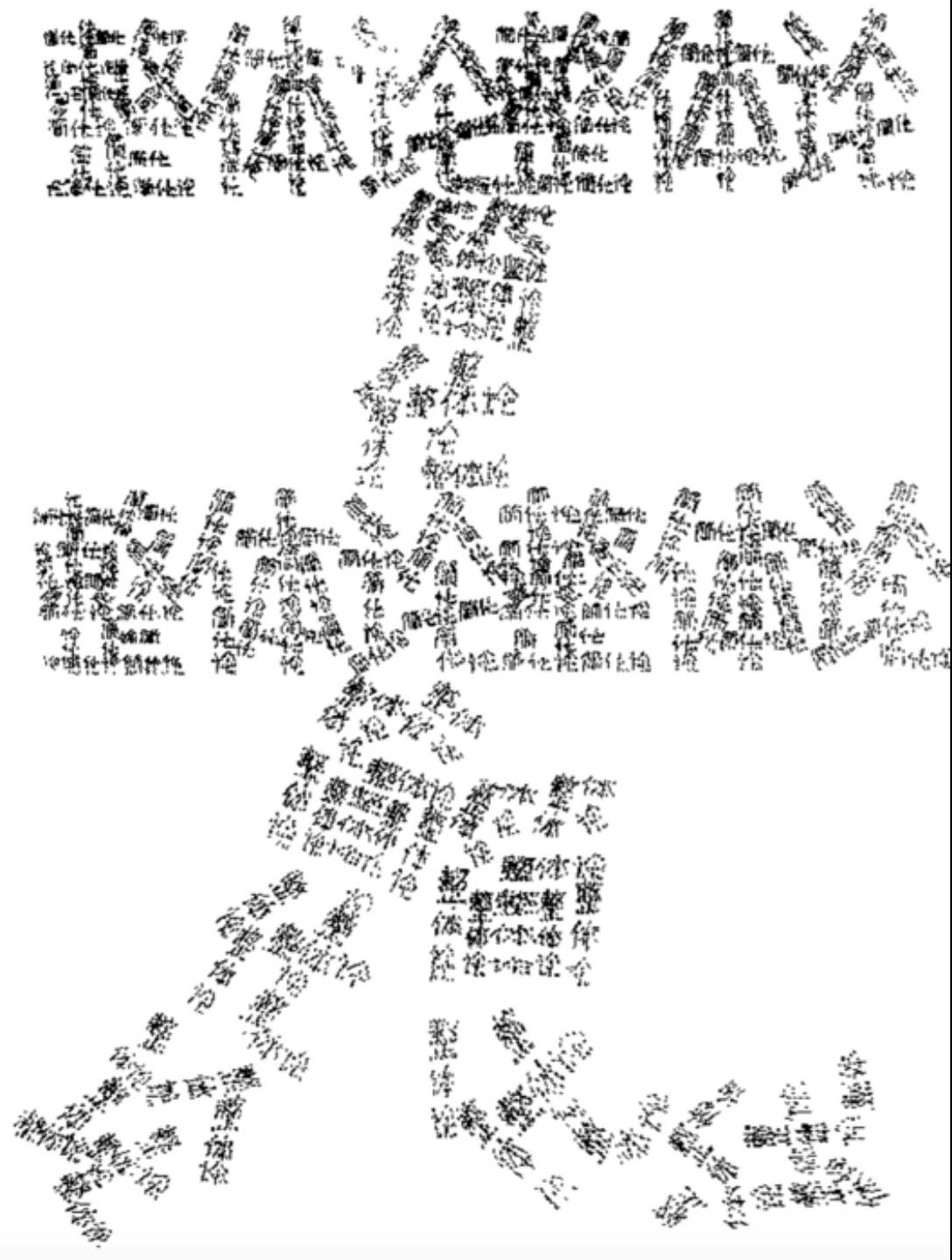
- 层级与层次的缠结
- 自指
- 从悖论到哥德尔定理
- 自复制机器

认识层次

- 高低
- 尺度
- 包含
- 虚拟

层次与意义

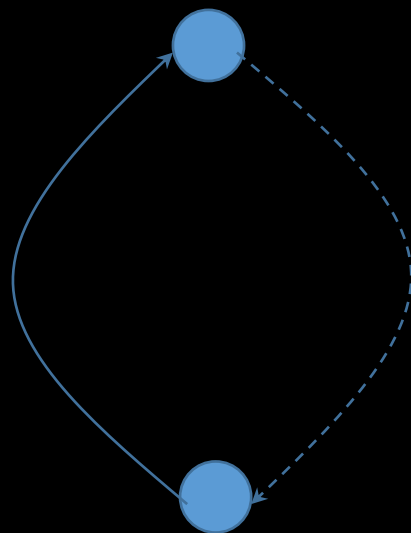
- 不同层次可以表达不同的意思



虚拟层次

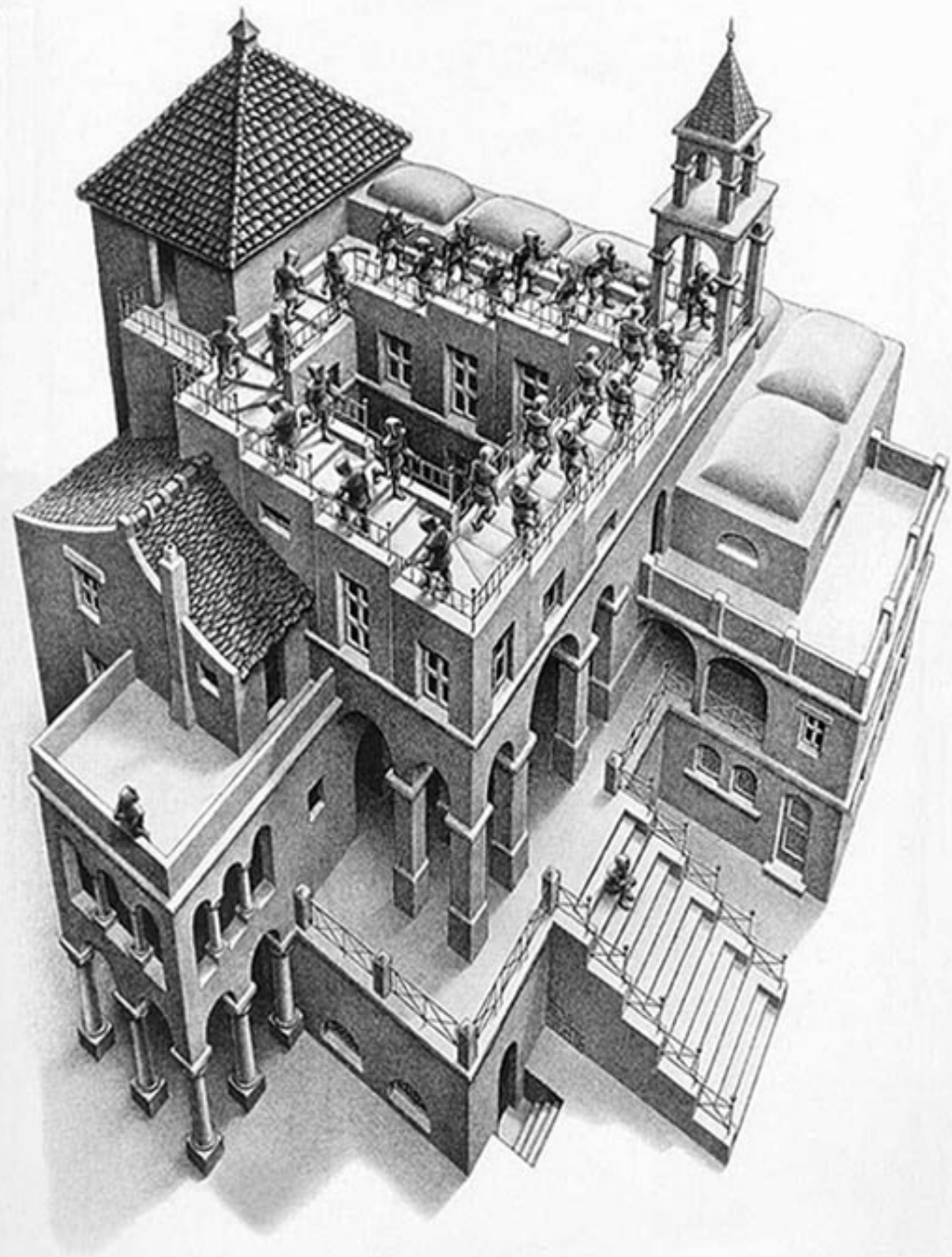


什么是层次的缠结？



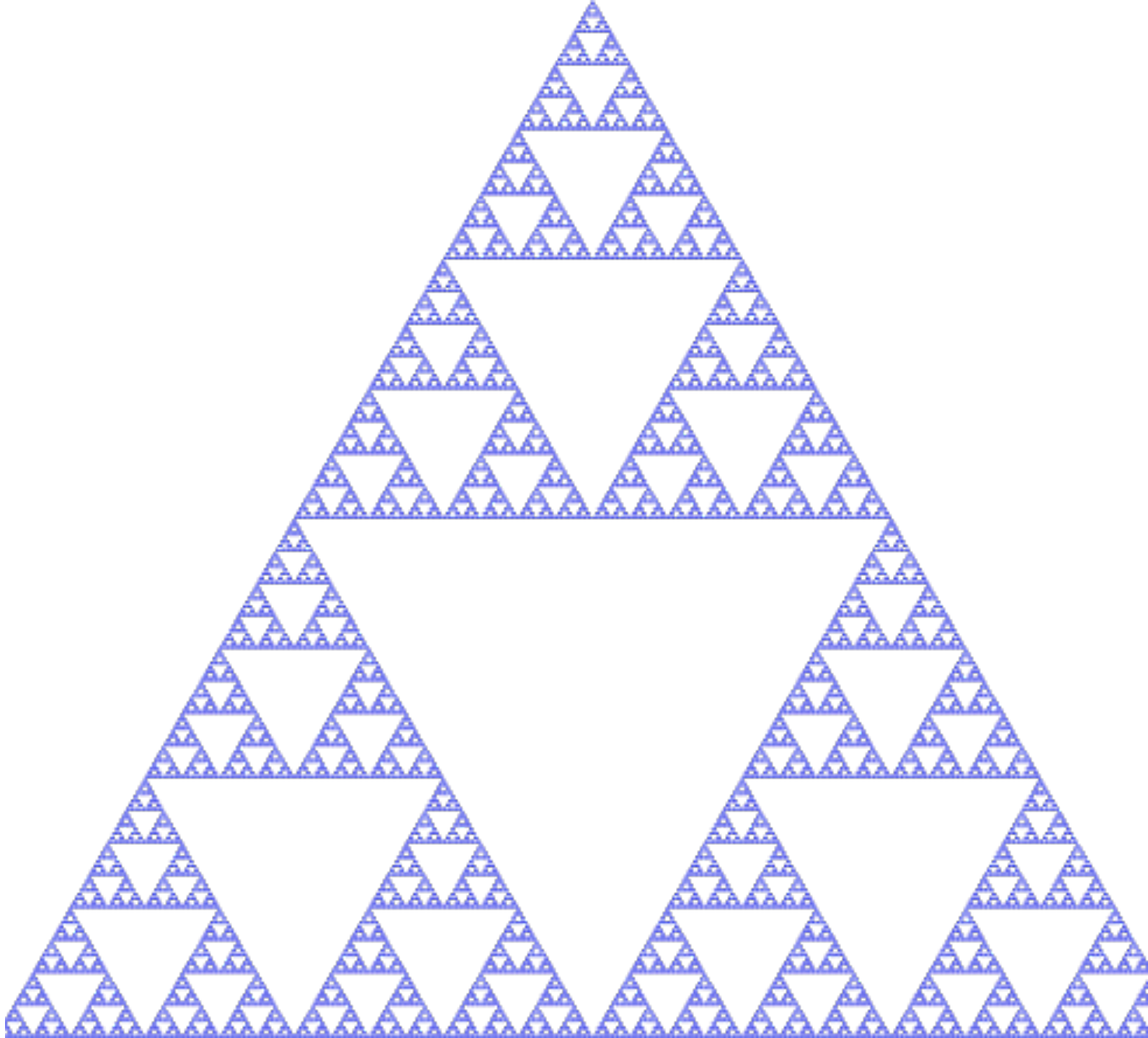
层次的缠结

利用视觉手段，将两个不同层级缠绕在一起

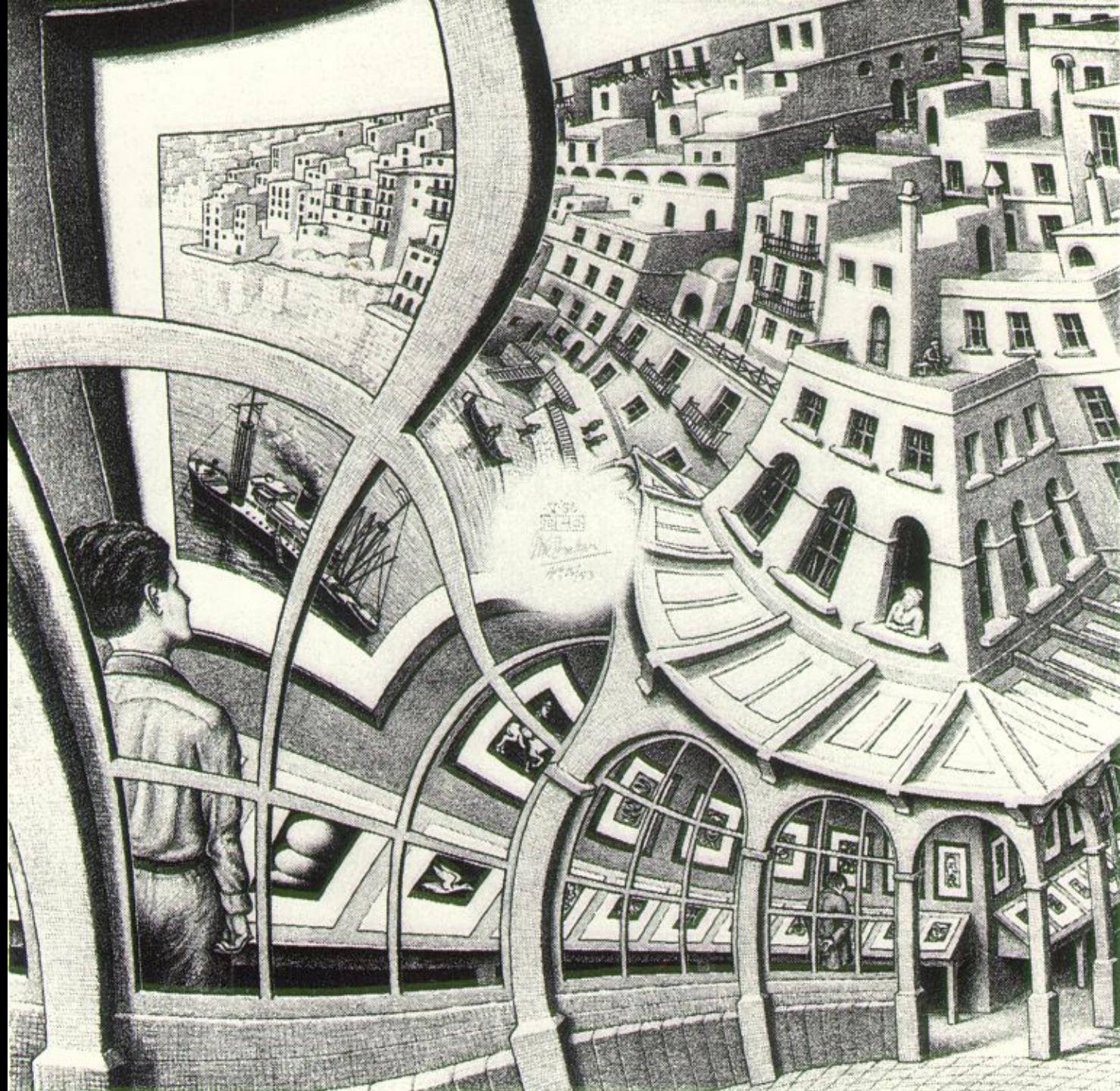


层次的缠结

- 分形是一种尺度层次的缠结



虚拟层次的缠结



今日内容

- 层级与层次的缠结
- 自指
- 从悖论到哥德尔定理
- 自复制机器

自指语句

这句话是错的

自指语句

这句话是错的
这句话是对的

自指语句

这句话是错的
这句话是对的

下面的话是对的
上面的话是错的

自指语句

这句话有2个‘这’字，2个‘句’字，2个‘话’字，
2个‘有’字，7个‘2’字，11个‘个’字，11个
‘字’字，2个‘7’字，3个‘11’字，2个‘3’字。

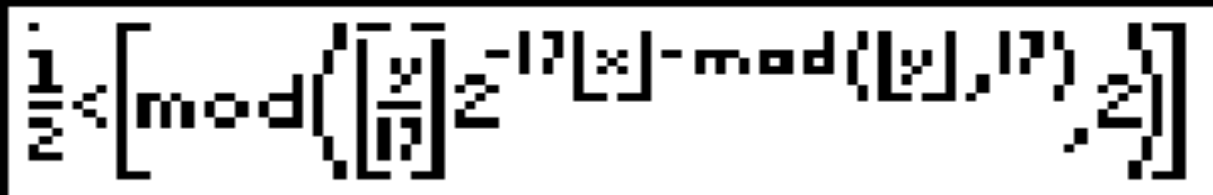
自绘制程序

- 请尝试设计下列函数：
 - 绘制该函数图形，即把这个函数的表达式绘制到了屏幕上

自绘制程序

$$\frac{1}{2} < \left\lfloor \text{mod}\left(\left\lfloor \frac{y}{17} \right\rfloor 2^{-17\lfloor x \rfloor - \text{mod}(\lfloor y \rfloor, 17)}, 2\right) \right\rfloor$$

当 $0 \leq x \leq 106$, $k \leq y \leq k+17$, k 为一个特殊的整数的时候, 所有满足下列不等式的 (x, y) 点的集合的图形为:



Mathematica code:

```
k=485845063618971342358209596249420204458140058798324454948309308506193470470880992845064476986552436484999724
70249151191104116057391774078569197543265718554420572104457358836818298237541396343382251994521916512843483329
05131193199953502413758765239264874613394906870130562295813219481113685339535565290850023875092856892694555974
28154638651073004910672305893358605254409666435126534936364395712556569593681518433485760526694016125126695142
1550539554519153785457525756590740540157929001765967965480064427829131488548259914721248506352686630476300;
out={};
out=Table[If[Floor[Mod[Floor[y/17]2^-17Floor[x]-Mod[Floor[y],17],2]]>1/2,1,0],{x,0,106},{y,k,k+17}];
gra=ArrayPlot[Reverse[Transpose[out]]]
```

请构造一个句子

- 不用使用指代词而实现自指的语句

自复制生命背后的魔咒

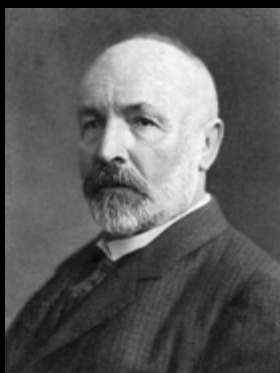
- 把“把中的第一个字放到左引号前面，其余的字放到右引号后面，并保持引号及其中的字不变”中的第一个字放到左引号前面，其余的字放到右引号后面，并保持引号及其中的字不变

今日内容

- 层级与层次的缠结
- 自指
- 从悖论到哥德尔定理
- 自复制机器

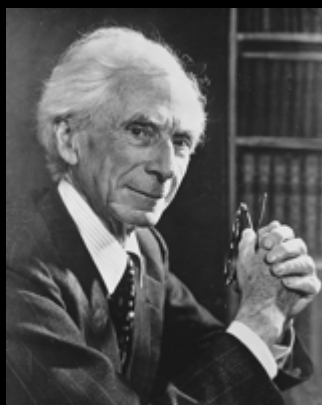
第三次数学危机

- 毁灭自指
 - 这句话是错的



Cantor

1874



Russel

1903



Godel

1931



Turing

1936

悖论

- 理发师悖论：
 - 村子里有个理发师，他给自己订了一条规矩：不给那些给自己理发的人理发。问：此人是否应该给自己理发？

第三次数学危机

- 理发师悖论：
 - 村子里有个理发师，他给自己订了一条规矩：不给那些给自己理发的人理发。问：此人是否应该给自己理发？

哥德尔定理

- 被美国纽约时报誉为“20世纪最伟大的数学定理”
 - 破碎了一代数学家的梦
 - 揭示出人类纯粹理性的极限

希尔伯特的梦想

- 严格按照公理化的方式重构数学
 - 消除直观与解释
 - 除了公理与推导规则，全都是机械的演算
 - 并且希望严格证明任意公理系统是完备且一致的。——希尔伯特第二问题



David Hilbert 1862-1943

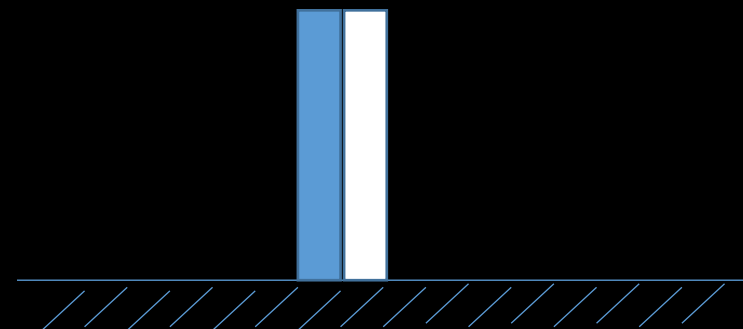
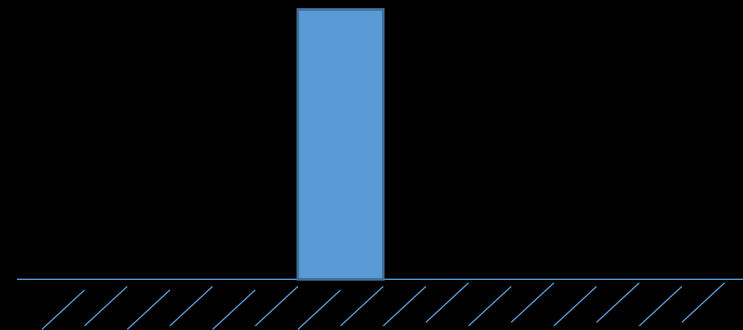
公理系统的隐喻

公理：第一块被推 到的骨牌
规则：地球引力和碰撞物理
定理：被推倒的骨牌
真理：倒掉的骨牌



一致性与完备性

- 竖立的骨牌：陈述
- 正面、反面朝上的骨牌：真命题、假命题

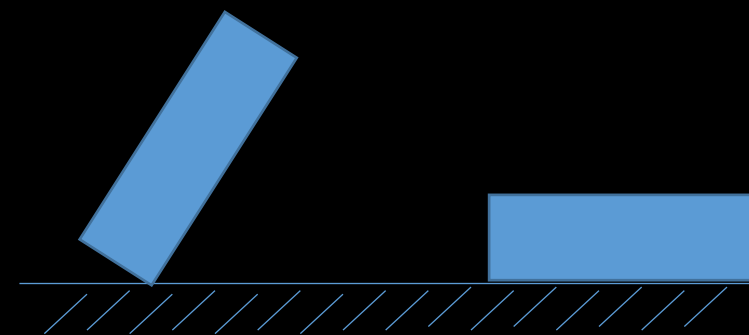


一致性与完备性

- 一致性: 不可能出现让一张骨牌同时朝两个方向倒的情形。
- 完全性: 不存在不是被其它骨牌推倒的骨牌



一致性被破坏



完全性被破坏

哥德尔定理

- 哥德尔第一定理：一阶谓词逻辑系统是完备的一致的
- 哥德尔第二定理：任何足够强大(蕴含皮亚诺公理体系)的逻辑系统都不能同时具备完备性和一致性。



Kurt Gödel 1906-1978

何谓足够强大

- 系统具备了自指的能力
（用数字编码所有的数学命题）



多米诺骨牌隐喻

- 如果形式化系统足够强大，从而具备自我指涉的能力，那么哥德尔定理就会成立。
- 如果骨牌不再是骨牌，而是一块屏幕，能够预测某真实骨牌的运作。
- 判定骨牌倒掉状态有两种方式：一种是我们人的判断，一种是骨牌系统的判断
- 人的判断和实际骨牌行为相悖

哥德尔证明

- 在数学公理系统中构造了一个句子：

本命题不可以被证明

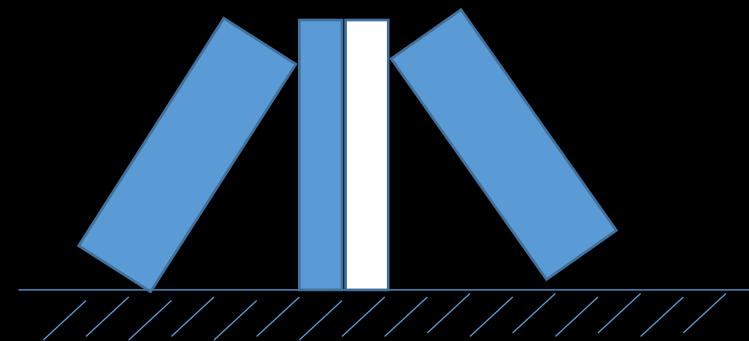
- 推理

如果该句子为假 $\sim G$ ，则它是可以被证明的，即为真 G ，于是 G 与 $\sim G$ 并存，一致性遭到破坏。 $(G$ 这个骨牌无法被推倒)

哥德尔证明

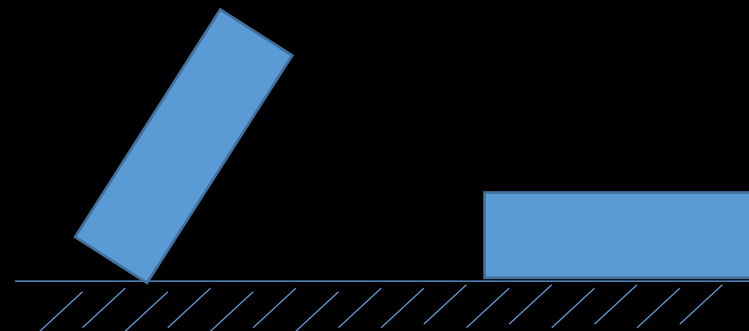
- 推理

如果该句子为假 $\sim G$ ，则它是可以被证明的，即为真 G ，于是 G 与 $\sim G$ 并存，一致性遭到破坏。(G这个骨牌无法被推倒)



一致性被破坏

如果该句子为真，则它不可以被证明，于是存在着不可证明的真命题，完全性无法满足。(不被推倒的倒着的骨牌)



完全性被破坏

如何理解哥德尔句子

- 本命题不可以被证明
- 两个层次：
 - 句子本身在陈述的含义，我们姑且不加判断地接受这个含义。
 - 我们的观察：不管句子本身说的对错与否，我们看它的表现。

数学中真有不可被证明的真理吗？

- 在关于整数理论的数学中，存在着不可被 证明的真理。
 - Ramsey 定理
 - Montague - Levy reflection定理
- 任何可以等价或者强于数论系统的数学公理系统，都必然存在不可被证明的真理

哥德尔定理的影响

- 粉碎了很多数学家们2000多年来的梦想
 - 真与可证是两个概念：可证的一定是真的，但真的不一定可证

上帝是存在的，因为数学无疑是相容的；魔鬼也是存在的，因为我们不能证明这种相容性。



Hermann Weyl

今日内容

- 层级与层次的缠结
- 自指
- 从悖论到哥德尔定理
- 自复制机器

为什么自复制是不可能的？



复杂度阈值：自复制的能力

若要自复制，必须在体内包含自己的全部信息，从而导致无穷

自打印源代码的程序

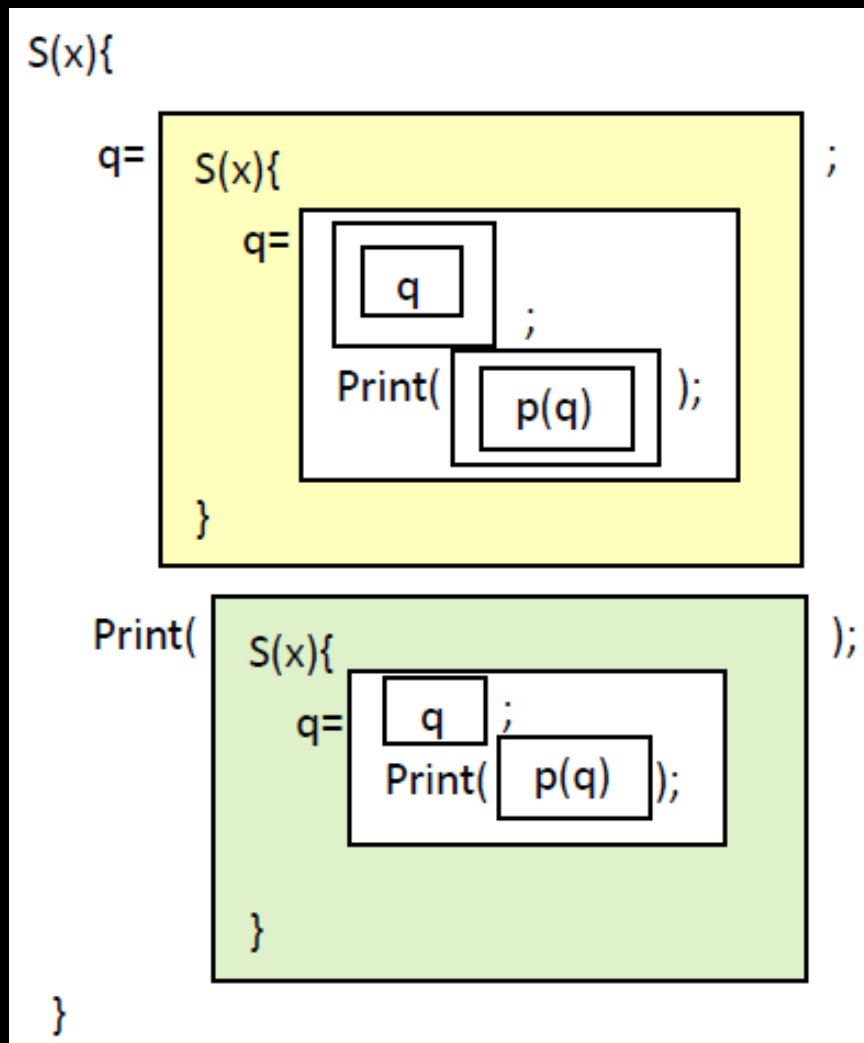
- 如何写一个程序P，它在不借助外界文件的条件下把自己的源代码打印出来？
- 该程序是如何不可能的：
- `Print('hello world!')`
- `Print('Print(\'hello world!\')`
- `Print('Print(\'Print(\'\'\'hello world!\'\'')\')`

```

S(x){
  q='S(x){\\n q=\\''+q+'\\'\\';\\n Print(\\''+p(q)+'\\'\\');\\n}';
  Print('S(x){\\n q=\\'+q+'\\';\\n Print(\\'+p(q)+'\\');\\n}');
}

```

自打印源代码的程序



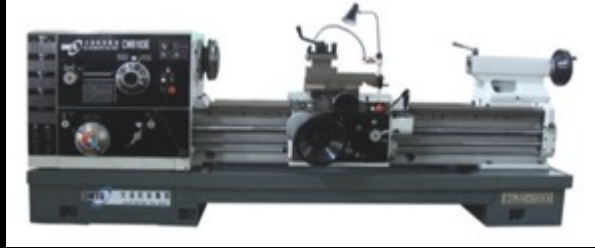
自复制生命背后的魔咒

- 把“把中的第一个字放到左引号前面，其余的字放到右引号后面，并保持引号及其中的字不变”中的第一个字放到左引号前面，其余的字放到右引号后面，并保持引号及其中的字不变

自复制生命背后的魔咒

- 把“把中的第一个字放到左引号前面，其余的字放到右引号后面，并保持引号及其中的字不变”中的第一个字放到左引号前面，其余的字放到右引号后面，并保持引号及其中的字不变
- 我们记 $Q(X)$ 为：
 - 把 X 中的第一个字放到左引号前面，其余的字放到右引号后面，
 - $Q(\text{"ok"}) = \text{o"ok" k}$
- $Q(q)$
 - $=Q(\text{"把中的第一个字放到左引号前面，其余的字放到右引号后面，并保持引号及其中的字不变"})$
 - $=$ 把“把中的第一个字放到左引号前面，其余的字放到右引号后面，并保持引号及其中的字不变”中的第一个字放到左引号前面，其余的字放到右引号后面，并保持引号及其中的字不变

自复制机如何运作？



+



自复制机如何运作？



+



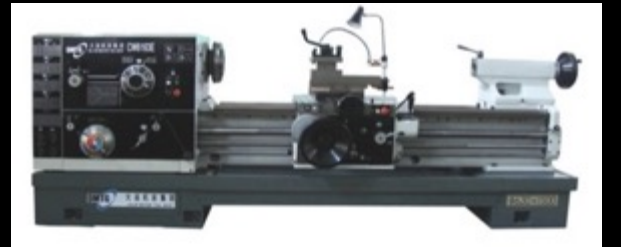
自复制机如何运作？



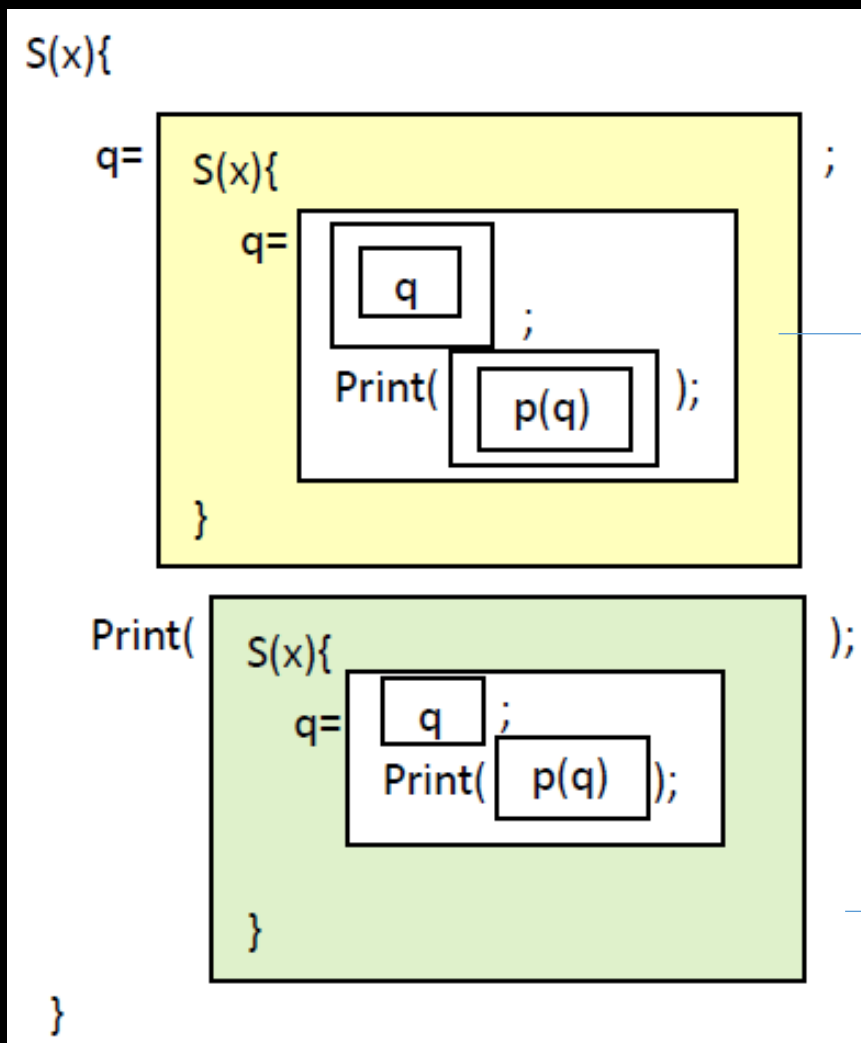
+



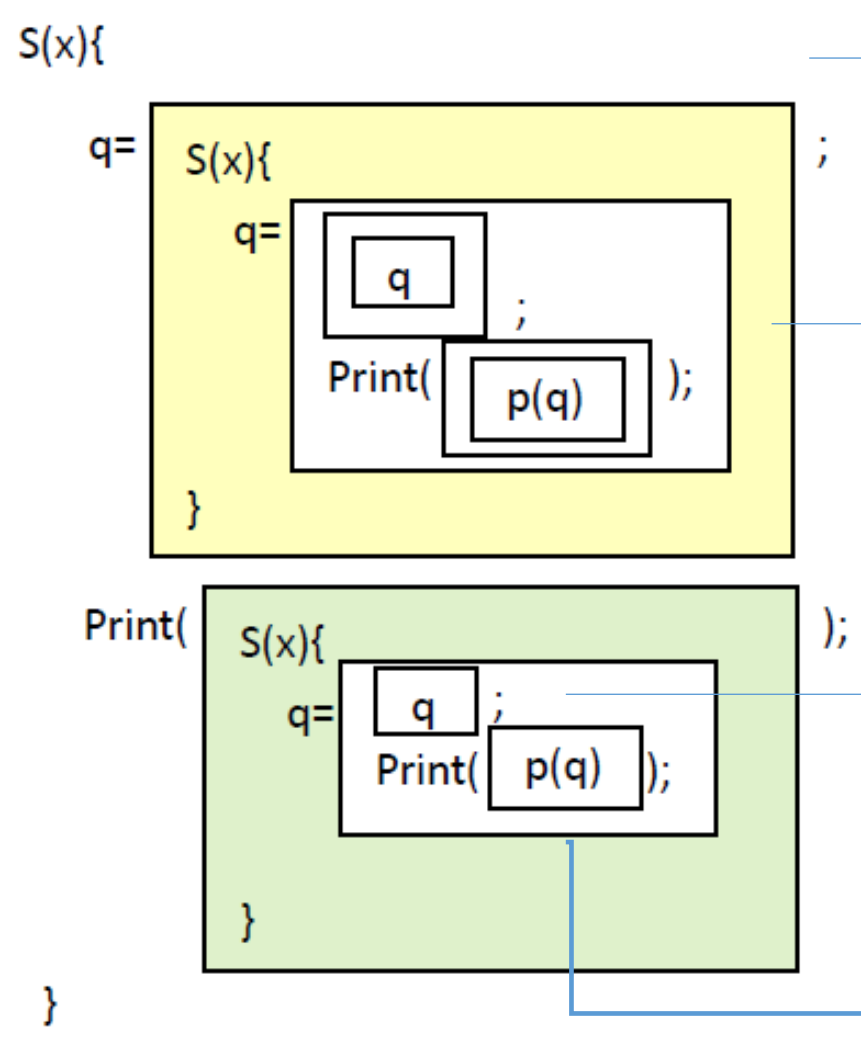
+



自复制机如何运作？



自复制机如何运作？



控制器



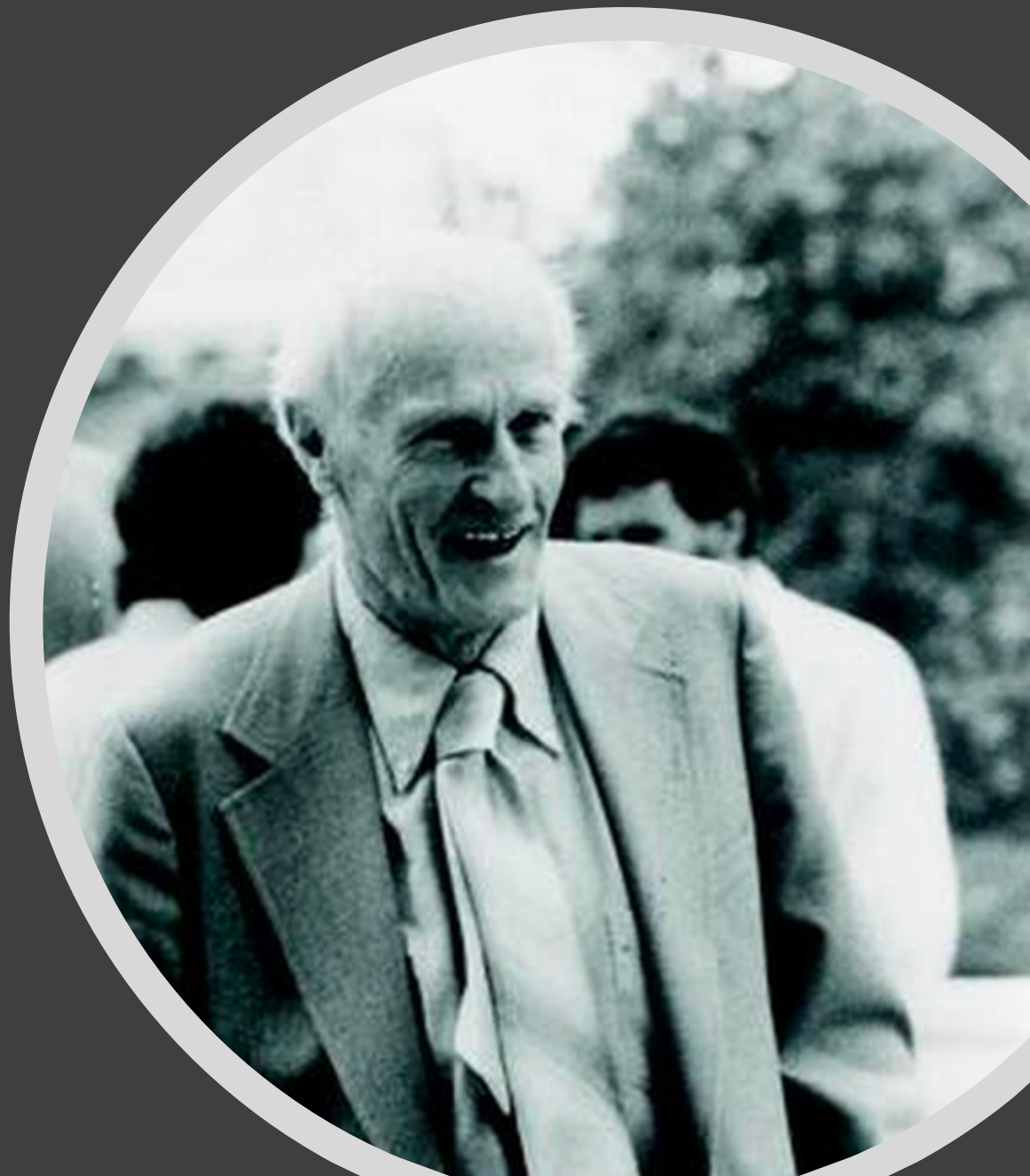
图纸

复制器

构造器

递归定理

- Kleene第二递归定理:
- 对于任意的程序 F ，总存在一段程序代码 c ，使得我们执行代码 c 的结果完全等价于把源代码 c 作为数据输入给程序 F 执行的结果。



自我意识和第二递归定理有关吗？

自复制机如何运作？



这句话是错的



这句话是对的

自颠覆的哥德尔语句，
自创生的冯纽曼自动机

今日内容

- 理解层级结构
- 理解虚拟层
- 什么是自指？
- 什么是哥德尔定理？
- 哥德尔定理和自指是什么关系？
- 自复制和自指是什么关系？