集智学园范畴论讲义 v1.7.0809

第一季第 7 课：线性空间的对偶性 线性代数、泛函分析、复几何、量子物理等领域中有许多密切关联的概念，例如：

- 复共轭、实转置、复共轭转置、伴随算子
- 自伴算子、特征值、谱理论
- 复结构、对合代数、C*-代数
- 对偶空间、自然配对、内积、张量缩并、欧式空间、黎曼几何
- 切空间、余切空间、张量场
- ... ...

本节课引入线性空间范畴中的对偶，试图通过这条线索来贯穿这些概念。首先从乘法的结合律看矩阵乘法，从一对行列向量借助矩阵的乘法可以讨论：

- 作为双线性映射的矩阵
- 互为对偶的行列向量
- 两种结合顺序体现了伴随

在上讲的最后，我们把幂集、特征函数和反变 Hom 函子三个概念在范畴的意义下统一起来了。用特征函数 (动态性质) 来描述子集 (静态性质)，用特征函数的全体 (动态) 来描述幂集 (静态)，体现了范畴论中研究态射 (动态) 的重要性。

反变 Hom 函子广泛出现在各个领域。幂集函子和特征函数集，属于函数集的一个特例。如果函数取值于交换环，可以进一步得到几何中常见的函数环。用反变 Hom 函子构造的函数环可以有十分精细的结构。拓扑上关注连续函数环，微分几何关注光滑函数环，复几何关注全纯函数环，代数几何关注多项式环，等等。

函数环的构造过程，前提是取值于 A 的集合自身具有交换环的结构。在拓扑空间上构造函数环，产生了不同的几何学，这是现代几何学的基本研究范式。

反变 Hom 函子不仅能在集合上产生函数环，还可以在线性空间上产生对偶空间。具体而言，把交换环 A 替换为域 K，并且把反变 Hom 函子限制在域 K 上的线性空间范畴，反变 Hom 函子把一个线性空间转化为这个线性空间上的线性函数的全体，它具有线性空间的结构，称为对偶空间。对偶空间的构造过程视为反变 Hom 函子，即对偶函子。

一对对偶线性空间的研究，引出了双线性问题。回顾双线性的概念，以双线性的图像插值说明双线性的意义——固定一个变元，诱导出一对线性函数。这一对线性函数互相构成对方的对偶向量。这种构造方式，在计算机科学里叫 currying。

有限维的双线性型可以用矩阵来构造。一对互相对偶的向量，可以通过自然配对的方式求值，这是一个双线性形式。另一种熟知的双线性型是内积。我们过去理解的内积，许多情况本质上是自然配对。我们给出了方向导数的例子。这里隐含着 Riesz 定理 (Riesz–Fréchet 表示定理)，这样把自然配对和内积这两种不同的双线性形式对应起来了，其应用很多，如两个列向量通过转置后的乘法做内积，以及 Dirac 记号。

进而从最初步的复共轭出发，介绍了 Dagger 范畴。接下来回顾伴随的概念，用矩阵的乘法来说明如何借助自然配对/内积，构造对偶空间的算子和对应的伴随算子。我们介绍了

用实矩阵表示的复数，在 Dagger 范畴的统一下，建立了复共轭和实转置的联系。这样便解释了伴随算子、实转置矩阵、复共轭转置矩阵、无穷维伴随算子这些概念的联系，也解释了 Galois 扩域、矩阵的特征值、算子的谱理论、量子力学的可观测量等概念的联系。

Dagger 范畴最常见的例子是 Hilbert 空间范畴和关系范畴。在 Hilbert 空间的应用如平方可积函数的积分形式的内积，它是复 Hermite 内积的扩展，对应的自然配对就是 Dirac 记号，其 Dagger 就是复共轭。在关系范畴，其 Dagger 就是反关系。

对偶函子 令 K 为域，考虑 K-线性空间范畴 $\mathbf{Vct}_K$。这个范畴中最特殊的对象之一就是域 $K \in \mathbf{Vct}_K$ 本身。K-线性空间 $V \in \mathbf{Vct}_K$ 上的 K-线性函数视为 $V \to K$ 的态射。X 上的 K-线性函数 $\forall f_1, f_2$，按照逐点定义的 K 上的加法和标量乘法，对于 $\forall v \in V, \forall \lambda_1, \lambda_2 \in K$：

$$(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(v) = \lambda_1 f_1(v) + \lambda_2 f_2(v)$$

构造了线性函数的加法和标量乘法，使得 V 上的 K-线性函数的全体构成 K-线性空间，称为 V 的**对偶空间 (dual space)**，记为：

$$V^* = h_K V = \mathbf{Vct}_K[V, K] \in \mathbf{Vct}_K$$

其中的元素称为**对偶向量 (covector)**。K-线性空间范畴的态射集仍然是 K-线性空间，这里的中括号 $\mathbf{Vct}_K[V, K]$ 体现了闭范畴的性质。

例 0.0.1. 行空间与列空间

维度为 $n \in \mathbb{N}$ 的 K-列空间 K_n 和 K-行空间 K^n 互为对偶空间。

例 0.0.2. 切空间与余切空间

微分流形上的点 $x \in X$ 上的切空间 $T_x X$ 和余切空间 $T_x^* X$ 互为对偶空间。

对偶空间的构造过程视为反变 Hom 函子，称为**对偶函子 (dual functor)**：

$$\begin{aligned} h_K : \mathbf{Vct}_K^{\mathrm{op}} &\xrightarrow{*} \mathbf{Vct}_K \\ V &\mapsto V^* = h_K(V) = \mathrm{Hom}(V, K) \\ W &\mapsto W^* = h_K(W) = \mathrm{Hom}(W, K) \\ h_K : \mathrm{Hom}(V, W) &\xrightarrow{*} \mathrm{Hom}(W^*, V^*) \\ f &\mapsto f^* \\ f^* : h_K(W) &\to h_K(V) \\ w^* &\mapsto f^*(w^*) = w^* \circ f \end{aligned} \tag{0.0.1}$$

它相当于拉回：

$$\begin{tikzcd}
K & & V \arrow[ll, "w^*\circ f\in V^*=h_K V"'] \arrow[dd, "f\in\mathbf{Vct}_K[V,W]=\mathrm{Hom}(V,W)"] \arrow[l, phantom, "\xLeftarrow{h_K}"] \\
& \arrow[u, "f^*\in\mathbf{Vct}_K[W^*,V^*]"] & \\
& & W \arrow[uull, "w^*\in W^*=h_K W\in\mathbf{Vct}_K"]
\end{tikzcd}$$

对偶和双线性　令 $\{V_i \in \mathbf{Vct}_K\}_{1\le i\le n}$ 为 n 个 K 线性空间，$V \in \mathbf{Vct}_K$ 为 K 线性空间，给定 n-元函数：

$$f : \prod_{i=1}^{n} V_i \to V$$
$$(v_1, \cdots, v_n) \mapsto f(v_1, \cdots, v_n)$$

若固定全部变元 $\forall(\tilde{v}_1, \cdots, \tilde{v}_n) \in \prod_{i=1}^{n} V_i$，只保留其中第 i 个变元，则诱导出一元函数：

$$f_i : V_i \to V$$
$$x \mapsto f_i(v) = f(\tilde{v}_1, \cdots, v_i, \cdots, \tilde{v}_n)$$

如此可以诱导出 n 个一元函数 $\{f_i\}_{1\le i\le n}$，如果它们都是线性函数，则 n 元函数 $f : \prod_{i=1}^{n} V_i \to V$ 称为 n-**重线性 (multilinear)**函数。$n = 2$ 时，称为**双线性 (bilinear)**函数。

对偶向量是线性函数，线性函数对向量的求值过程相当于二元线性函数。

定义 0.0.3. 自然配对

令 $V \in \mathbf{Vct}_K$ 为 K-线性空间，$V^* = h_K V$ 为对偶空间，以下形式的对偶向量的双线性映射

$$V^* \times V \xrightarrow{\langle\cdot,\cdot\rangle} K$$
$$(v^*, v) \mapsto \langle v^*, v\rangle = v^*(v)$$

称为**自然配对 (natural pairing)**.

例 0.0.4. 行列配对

n 维线性空间选定基后，向量具有确定的列向量表示，对偶向量具有确定的行向量表示，线性映射具有确定的矩阵表示. 记 $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n_1$ 为行向量空间，$\mathbb{R}_n = \mathbb{R}^1_n$ 为列向量空间，二者是对偶空间. 一对对偶空间的自然配对，作为双线性型具有以下形式：

$$
\begin{aligned}
\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_n &\xrightarrow{A} \mathbb{R} \\
(f,x) &\mapsto f \circ A \circ x \\
&\mapsto= f \circ A \circ x
\end{aligned}
$$

其中 $A \in \mathfrak{n}$ 确定了双线性映射. 通常选定 $A = I(n)$ 为单位矩阵，有如下自然配对:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_n &\to \mathbb{R} \\
(f,x) &\mapsto \begin{bmatrix} f^1 & \cdots & f^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \\
&= \sum_{i=1}^{n} f^i x_i = f^i x_i
\end{aligned} \tag{0.0.2}
$$

考虑 $K = \mathbb{R}$ 的实线性空间范畴 $\mathbf{Vct}_{\mathbb{R}}$:

定义 0.0.5. 实内积

如果双线性型是**正定的 (positive definite)**，即

$$
\begin{aligned}
V \times V &\xrightarrow{\langle\cdot,\cdot\rangle} K \\
(v,w) &\mapsto \langle v,w \rangle
\end{aligned}
$$

对于 $\forall v \in V$ 满足

$$\langle v,v \rangle \geq 0$$

且

$$\langle v,v \rangle = 0 \iff v = 0$$

实线性空间 $V \in \mathbf{Vct}_{\mathbb{R}}$ 上的正定对称双线性型 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 称为**内积 (inner product)**，赋予了内积的空间称为内积空间，记为 $(V\langle\cdot,\cdot\rangle)$.

选定了基的有限维实线性空间，相当于实的列向量空间 $V = \mathbb{R}_n$，可以用自然配对，也就是矩阵乘法构造内积

$$
\begin{aligned}
V \times V &\to \mathbb{R} \\
(x,y) &\mapsto \langle x,y \rangle = x^T y = \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i
\end{aligned}
$$

例 0.0.6.

内积是双线性型。

在线性空间上赋予内积，构成内积空间。量子力学和量子信息高度依赖于完备的内积空间，即 Hilbert 空间。当前的研究倾向于在 **Hilbert 空间范畴 (category of Hilbert spaces)**中讨论，记为 **Hilb**，见 [Heunen and Vicary, 2019] 及 [Kock, 2003]。

伴随 [Heunen and Vicary, 2019] 直接把范畴中的态射定义为**算子 (operator)**，这体现了从线性代数中的矩阵一脉相承的思想。

定义 0.0.7. 伴随算子

给定 $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle) \in \mathbf{Hilb}$，若算子 $A, B \in \mathrm{End}(V)$ 对于 $\forall x \in V, y \in W$ 满足

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, By\rangle \tag{0.0.3}$$

则称 A 和 B 为**伴随算子 (adjoint operator)**，通常把 A 的伴随算子记为 A^*。

向量在自然配对下自动产生内积，有限维的内积空间是完备的，故可以置于 **Hilb** 范畴考虑。给定 n-维实线性空间 $V \in \mathbf{Hilb}_{\mathbb{R}}$，选定基后用坐标写为列向量，算子即实线性态射 $f \in \mathrm{End}(V)$ 有 $n \times n$ 维矩阵 $A \in \mathbb{R}^n_n$ 表示。下面得到例子说明了矩阵转置的伴随意义：

例 0.0.8. 矩阵乘法

给定对偶向量：

$$v = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \end{bmatrix} \in (V = \mathbb{R}_3), \quad w^* = \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} \in (W^* = \mathbb{R}_2)$$

线性映射 $f \in \mathbf{Vct}_K[V, W]$ 通过一个矩阵 A 以左乘的方式实现：

$$\begin{aligned} f : (V = \mathbb{R}_2) &\to (W = \mathbb{R}_2) \\ v \mapsto f(v) = Av &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 \\ 68 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

在对偶向量 w^* 作用下：

$$w^*(f(v)) = \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 23 \\ 68 \end{bmatrix} = 341$$

(0.0.1) 式的构造方式要求复合态射的交换性。

$$(w^* \circ f)(v) = w^*(f(v))$$

这里 $w^* \circ f$ 是通过矩阵 A 的右乘构造：

$$\begin{aligned} f^* : (W^* = \mathbb{R}^2) &\to (V^* = \mathbb{R}^2) \\ w^* \mapsto w^* \circ f = w^* A &= \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 26 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

A 的转置则构成 $A^T \in \mathbf{Vct}[W^*, V^*]$:

$$((W^*)^T = \mathbb{R}_2) \to ((V^*)^T = \mathbb{R}_3)$$
$$(w^*)^T = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \mapsto A^T (w^*)^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 26 \end{bmatrix}$$

对应了

$$w^* A v = (A^T (w^*)^T)^T v = \begin{bmatrix} 19 & 26 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \end{bmatrix} = 341$$

这样通过矩阵 $A \in \mathbf{Vct}[V, W]$ 和 $A \in \mathbf{Vct}[W^*, V^*]$ 的双重性质，构造了两个自然配对 $\langle w^* A, v\rangle = \langle w^*, Av\rangle$ 的联系:

$$\begin{tikzcd}
v \in V \arrow[r, mapsto, "A\in\mathbf{Vct}[V,W]"] \arrow[d] & Av \arrow[d] \\
\langle w^* A, v\rangle \arrow[r, Rightarrow] & \langle w^*, Av\rangle \\
w^* A \in V^* \arrow[u] & w^* \in W^* \arrow[l, mapsto, "A\in\mathbf{Vct}[W^*,V^*]"'] \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

它反映出矩阵的转置 A^T 就是伴随算子 f^* 的矩阵表示

例 0.0.9. 复共轭转置

复数可以用冗余的实矩阵表示为:

$$a + ib = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = aI + bJ \tag{0.0.4}$$

矩阵表示下的加法和乘法复合矩阵运算规则:

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c & -c-d \\ c+d & a+c \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac-bd & -ad-bc \\ ad+bc & ac-bd \end{bmatrix}$$

也符合复数运算的性质. (0.0.4) 式中复数的共轭相当于矩阵的转置:

$$a - ib = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} = aI - bJ \tag{0.0.5}$$

一个 $(m \times n)$-维的复矩阵 $M^{\mathbb{C}} \in \mathbb{C}^n_m$，拆分实部和虚部后得到如下两个实矩阵 $A, B \in \mathbb{R}^n_m$:

$$M^{\mathbb{C}} = \begin{bmatrix} z_1^1 & \dots & z_1^m \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z_n^1 & \dots & z_n^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^1 & \dots & x_1^m \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^1 & \dots & x_n^m \end{bmatrix} + \mathrm{i} \begin{bmatrix} y_1^1 & \dots & y_1^m \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_n^1 & \dots & y_n^m \end{bmatrix} = A + \mathrm{i}B$$

类似 (0.0.4) 式的实矩阵表示法，可以构造一个 $(2m \times 2n)$-维的分块实矩阵表示：

$$M^{\mathbb{R}} = \begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix}$$

对其求实转置得到伴随矩阵：

$$(M^{\mathbb{R}})^{\dagger} = (M^{\mathbb{R}})^{T} = \begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix}^{T} = \begin{bmatrix} A^T & B^T \\ -B^T & A^T \end{bmatrix} = A^T - \mathrm{i}B^T$$

它在复矩阵表示下仍然是伴随矩阵，根据 (0.0.5) 式复共轭相当于实矩阵的转置，复伴随矩阵相当于复**共轭转置 (conjugate transpose)**：

$$\left(M^{\mathbb{C}}\right)^{\dagger} = (\overline{M^{\mathbb{C}}})^{T} = (A - \mathrm{i}B)^{T} = A^T - \mathrm{i}B^T$$

实转置和复共轭转置都是求伴随矩阵的运算，统一用 † 记号表示。

定义 0.0.10. 自伴算子

若算子 A 等于其伴随算子 A^*，称 A 为**自伴算子 (self-adjoint operator)**。

例 0.0.11. 实对称矩阵

实对称矩阵 A 满足 $A = A^T$，在实内积下构成了自伴算子。

例 0.0.12. Hermite 矩阵

复 Hermite 矩阵 A 满足 $A = A^{\dagger} = (\overline{A})^{T}$，在 Hermite 内积下构成了自伴算子。

例 0.0.13. L^2 空间

测度空间 (X, μ) 上的复平方可积函数空间 L^2 上构造内积

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_X \overline{\varphi(x)} \psi(x) \mathrm{d}\mu(x)$$

这样构造出的 Hilbert 空间是量子理论的态空间，其上的自伴算子构成量子化的公理基础。

复数的共轭、实矩阵的转置、复矩阵的共轭转置、伴随算子、乃至对合代数、C*-代数等数学概念，都可以纳入到 **Dagger 范畴 (dagger category)**的框架 [Selinger, 2007]。

定义 0.0.14.

范畴 $\mathcal{C}$ 上赋予一个反变自函子：

$$\begin{aligned} \dagger : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} &\to \mathcal{C} \\ X &\mapsto X^\dagger \\ Y &\mapsto Y^\dagger \\ \dagger : \mathrm{Hom}(X,Y) &\to \mathrm{Hom}(Y^\dagger, X^\dagger) \\ f &\mapsto f^\dagger \\ f^\dagger : Y^\dagger &\to X^\dagger \end{aligned}$$

若对 $\forall X \in \mathcal{C}$ 都有：

$$(X^\dagger)^\dagger = X$$

则 $\dagger$ 称为**对合函子 (involutive functor)**。

内积、矩阵、自然配对、双线性这些概念的相似之处，最终可用 **Riesz–Fréchet 表示定理 (Riesz–Fréchet representation theorem)**理解，即 **Hilb** 范畴中的一对对偶向量，通过内积可以建立同构。

Bibliography

[Heunen and Vicary, 2019] Heunen, C. and Vicary, J. (2019). *Categories for Quantum Theory: An Introduction.* Oxford University Press.

[Kock, 2003] Kock, J. (2003). *Frobenius Algebras and 2D Topological Quantum Field Theories.* Cambridge University Press, Cambridge.

[Selinger, 2007] Selinger, P. (2007). Dagger Compact Closed Categories and Completely Positive Maps. *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, 170.