集智学园范畴论讲义 v1.7.0811

第一季第 9 课：正合　集合论中单射与满射的概念，在赋予了代数结构后对应特定范畴中的单同态与满同态。引入左右消去律来定义单态射与满态射，可以看出明确的左右对偶性，并且推到范畴论的一般情况，产生了许多同调代数的方法。

子集、子群、线性子空间等概念，在范畴中统一用子对象刻画。描述子对象的工具是单态射下的内射嵌入。用类似于极限的方式可以构造中介态射，形成子对象之间的偏序。类似地，也可以用满态射下的投射，以及相应的中介态射，构造商对象。子对象与商对象构成了一对应用广泛的对偶概念。

同调的方法着重于对 Abel 范畴的研究，最基本的例子就是 Abel 群范畴。注意到平凡 Abel 群，也就是范畴中的零对象，作为终对象与始对象，自动构造了单态射与满态射。并且产生了一个平凡的正合的情况。正合是同调的基本设定。同调方法关注的是相邻两次复合态射退化的问题设定，例如拓扑中“边界没有边界”的现象。相邻两次复合态射退化等效于前一次态射的像是后一次态射的核的子集，若核与像这两个集合相等则是正合。

正合和同调的描述方式代表着现代数学的观点。为了阐明正合的意义，我们回顾了代数中基本的 Abel 群的第一群同构定理。首先介绍了核、像、余核、余像这些对偶的概念，它们在子对象与商对象中也是成对出现的。同构定理本质上是描述了核与余核的同构，这种同构是子对象与商对象的同构。满足这种条件的范畴往往被纳入到 Abel 范畴的框架下。

态射序列的正合性质是许多现代数学问题的基本设定。从方法而言，短正合序列则是更加基础的研究工具。短正合序列高度对偶化，其中出现的零对象，同时体现了始对象与终对象的对偶，单态射与满态射的对偶，子对象与商对象的对偶。更重要的是，在短正合序列中出现了核与余核的对偶。代数中基础的同构定理，不限于具体的范畴，在短正合序列中都有了对偶的体现。

消去律　在代数中通常把单态射理解为**单的 (injective)**的同态，把满态射理解为**满的 (surjective)**的同态. 这种理解方式，是在集合单/满映射的基础上，附加以同态的条件，以保持代数结构.

在更广泛的范畴论的意义上，用**单的 (monic)**替代**单的 (injective)**，用**满的 (epic)**替代**满的 (surjective)**. 用消去律来抽象可逆的概念，即对于二元运算的代数系统及其元素 $\forall a, b, c \in (M, \cdot)$ 有：

- **左消去的 (left-cancellative)**：$a \cdot b = a \cdot c \Rightarrow b = c$
- **右消去的 (right-cancellative)**：$b \cdot a = c \cdot a \Rightarrow b = c$

用消去律来考察态射：

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, shift left, "g_1"] \arrow[r, shift right, "g_2"'] \arrow[rr, bend left, "fg_1"] \arrow[rr, bend right, "fg_2"'] & X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

若 f 对任意态射 $g_1, g_2 : Z \to X$ 是**左消去的 (left-cancellative)**：

$$fg_1 = fg_2 \Rightarrow g_1 = g_2$$

则 f 称为**单态射 (monomorphism)**.

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g_1 f"] \arrow[rr, bend right, "g_2 f"'] & Y \arrow[r, bend left, "g_1"] \arrow[r, bend right, "g_2"'] & Z
\end{tikzcd}
$$

若 f 对任意态射 $g_1, g_2 : Y \to Z$ 是**右消去的 (right-cancellative)**:

$$g_1 f = g_2 f \Rightarrow g_1 = g_2$$

则 f 称为**满态射 (epimorphism)**.

子对象与商对象　范畴中固定对象 X，考虑单态射 $u : U \to X$ 和 $v : V \to X$ 的关系．例如在 Abel 群范畴 **Ab** 中可以写为正合序列:

$$0 \longrightarrow U \simeq \mathrm{Im}\ u \xrightarrow{u} X \qquad 0 \longrightarrow V \simeq \mathrm{Im}\ v \xrightarrow{v} X$$

单态射给出了同构意义下的像的嵌入.

$$
\begin{tikzcd}
U \arrow[d, dashed] \arrow[dr, "u"] & \\
V \arrow[r, "v"'] & X
\end{tikzcd}
$$

如果存在上图中的态射 $U \to V$ 使图交换，则显然它是唯一的单态射．在对 X 存在单态射的对象族中，如此构造了一个偏序 $u \leq v$．偏序的自反性 $u \leq v \wedge v \leq u \Rightarrow u = v$ 是同构意义下的相等．这样构成的同构等价类中的对象，称为 X 的**子对象 (subobject)**．X 的子对象在这个偏序下构成偏序集范畴 $(X, \leq)$。

对偶地，考虑满态射 $u : X \to U$ 和 $v : X \to V$ 的关系．在 Abel 群范畴 **Ab** 中可以写为正合序列:

$$X \xrightarrow{u} U \simeq X/\mathrm{Ker}\ u \longrightarrow 0 \qquad X \xrightarrow{v} V \simeq X/\mathrm{Ker}\ v \longrightarrow 0$$

满态射给出了同构意义下对核的商，构成自然投射.

$$
\begin{tikzcd}
U & \\
V \arrow[u, dashed] & X \arrow[ul, "u"'] \arrow[l, "v"]
\end{tikzcd}
$$

如果存在上图中的态射 $V \to U$ 使图交换，则显然它是唯一的单态射．在对 X 存在满态射的对象族中，如此构造了一个偏序 $u \leq v$．偏序的自反性 $u \leq v \wedge v \leq u \Rightarrow u = v$ 是同构意义下的相等．这样构成的同构等价类中的对象，这样构成了 X 的**商对象 (quotient object)**．X 的商对象在这个偏序下构成偏序集范畴 $(X, \leq)$。

这样概括了子群、子群、线性子空间、子模、子代数，商集、商群、线性商空间、商模、商代数等广泛的概念。

往往把一个对象 X 的子对象的全体记为 $\Omega(X) = \mathrm{Sub}(X)$ ，它的意义体现在**子对象分类器 (subobject classifier)**和 topos 理论中。

正合序列 在 Abel 群范畴 $\mathbf{Ab}$ 中考虑首尾相连，从而可以复合的态射序列：

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

大多数和正合、同调代数相关的问题，有一个附加条件即相邻的复合态射退化：

$$g \circ f = 0 \iff \mathrm{Im}\ f \subseteq \mathrm{Ker}\ g \tag{0.0.1}$$

当这里的等号成立时，称 f 和 g 在 B 处**正合 (exact)**。态射序列若处处正合，称为**正合序列 (exact sequence)**。若令上图箭头反向，则 Im 和 Ker 交换。这里体现了范畴论中，箭头反向所产生的**对偶性 (duality)**。

前面以线性空间范畴为例讨论了零对象即平凡线性空间的构造，类似可以考虑其它范畴。群 $(G, \cdot, 1) \in \mathbf{Grp}$ 和 Abel 群范畴 $(G, +, 0) \in \mathbf{Ab}$ 的区别在于群运算的交换性。只包含幺元的群叫做**平凡群 (trivial group)**。平凡群不只一个，但平凡群之间相互同构。在同构的意义下，我们认为只有唯一的平凡群。习惯上两个范畴中的平凡群记为 $1 = (\{1\}, \cdot, 1) \in \mathbf{Grp}$ 和 $0 = (\{0\}, +, 0) \in \mathbf{Ab}$。平凡群可以构造正合序列：

$$A \xrightarrow{f} 0 \xrightarrow{g} B \tag{0.0.2}$$

注意到这里的态射 f 和 g 是唯一的。显然 $\mathrm{Im}\ f = 0 = \mathrm{Ker}\ g$。并且 f 是**满态射 (epimorphism)**，g 是**单态射 (monomorphism)**。给定正合序列 $0 \xrightarrow{i} A \xrightarrow{h} B, \mathrm{Im}\ i = 0 = \mathrm{Ker}\ h$，即单态射 i 赋予了 h 单态射的性质，于是 $A \simeq \mathrm{Im}\ h \lhd B$ 相当于嵌入。$A \xrightarrow{h} B \xrightarrow{p} 0$，$\mathrm{Im}\ h = B = \mathrm{Ker}\ p$，即满态射 p 赋予了 h 是满态射的性质，于是 $A/\mathrm{Ker}\ h \simeq \mathrm{Im}\ h = B$ 相当于投影。$0 \xrightarrow{i} A \xrightarrow{h} B \xrightarrow{p} 0$ 相当于说 h 是单满态射即同构。

Abel 群的同态 集合范畴中讨论态射 $f \in \mathbf{Set}(X, Y)$，定义 X 上的等价关系：

$$f(x_1) = f(x_2) \iff x_1 \sim x_2$$

记商集为 $X/f = X/\sim$，显然 X/f 和 $\mathrm{Im}\ f \subseteq Y$ 有双射，即在集合范畴同构：

$$X/f \simeq \mathrm{Im}\ f \tag{0.0.3}$$

Abel 群范畴 $\mathbf{Ab}$ 中的态射 $f \in \mathrm{Hom}(A, B)$ 是可以保持群结构的群同态：

$$
\begin{aligned}
f : A &\to B \\
x &\mapsto f(x) \\
y &\mapsto f(y) \\
x + y &\mapsto f(x+y) = f(x) + f(y)
\end{aligned}
$$

这样可以得到两个相关的 Abel 群：

- **核 (kernel)** $\mathrm{Ker}\ f = \{x \in A \mid f(x) = 0\}$
- **像 (image)** $\mathrm{Im}\ f = \{y \in B \mid \exists x : y = f(x)\}$

并且可以得到两个商群：

- **余核 (cokernel)** $\mathrm{Coker}\ f = B/\mathrm{Im}\ f$
- **余像 (coimage)** $\mathrm{Coim}\ f = A/\mathrm{Ker}\ f$

第一群同构定理告诉我们：

$$A/\mathrm{Ker}\ f \simeq \mathrm{Im}\ f \tag{0.0.4}$$

于是

$$\mathrm{Coim}\ f \simeq \mathrm{Im}\ f$$

这实际上是同调论和 Abel 范畴的基础．在一个范畴中，有没有这样的同构，是这个范畴能否构成 Abel 范畴的核心问题．在学习抽代的过程中，在线性空间和模上，也会遇到类似的同构定理．这背后的机制实际上是因为 Abel 群、模、线性空间等都构成 Abel 范畴．

短正合序列　Abel 群范畴 **Ab** 中如下形式的正合序列称为短正合序列 (short exact sequence)，其它范畴中的定义类似：

$$0 \xrightarrow{i} A \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} C \xrightarrow{p} 0$$

这里出现了三处正合：

- $\mathrm{Im}\ i = \mathrm{Ker}\ f = 0$，于是 f 是单态射
- $\mathrm{Im}\ f = \mathrm{Ker}\ g$
- $\mathrm{Im}\ g = \mathrm{Ker}\ p = C$，于是 g 是满态射

单态射 f 构成了同构意义下的嵌入 $A \simeq \mathbf{Im}\ f \subseteq M$，满态射 g 构成了投射 $g: M \to C$. 根据 (0.0.4) 有

$$C = \mathrm{Im}\ g \simeq M/\mathrm{Ker}\ g = M/\mathrm{Im}\ f \simeq M/A \tag{0.0.5}$$

这样 A 作为 M 的子群，而 C 作为 M 的商群，且有：

$$0 \xrightarrow{\quad i \quad} A \simeq \mathrm{Im}\ f \xrightarrow{\quad f \quad} M \xrightarrow{\quad g \quad} C \simeq M/A \xrightarrow{\quad p \quad} 0$$

例 0.0.1. 实数的紧化

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}/\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$