

# 量子与统计基础

## 第五章：全同粒子与统计

金潮渊

信息与电子工程学院，微纳电子研究所

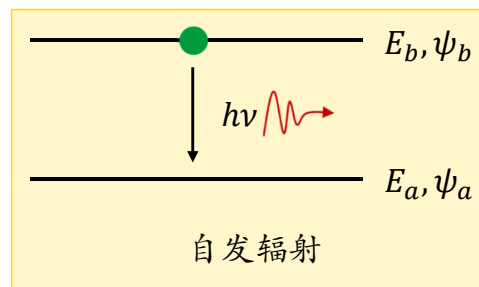


## C5-1 玻色子和费米子

# 课程回顾

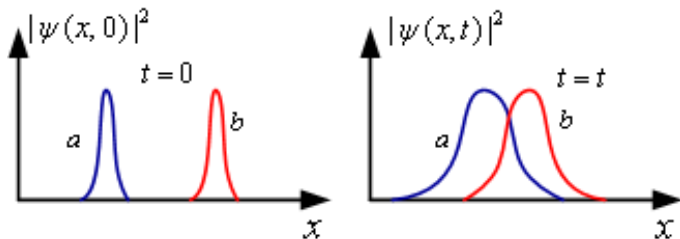
## 自发辐射与光子态密度：

- 自发辐射是由于真空零点能带来的“零点辐射”，导致电子从高能级跃迁至低能级，可以看作二能级系统在“虚光子”扰动下的受激辐射。
- 分析自发辐射可以利用非相干条件扰动下，受激发射的平均跃迁速率。光子态密度为  $g(\omega) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3}$
- 自发辐射是发光二极管的工作基础。



# 全同粒子的不可区分性

- 在经典力学中，可以利用坐标和动量来时刻追踪任何质点的轨迹。即便是相同的质点，如果有多个相同质点，仍能区分各个质点。
- 量子力学的情况不同：只能知道某一粒子在某一位置  $\mathbf{r}$  处某时刻  $t$  附近  $d\tau$  内的几率，而不能肯定粒子在哪一个  $d\tau$  之内。
- 当两个粒子在  $t=0$  时，如果它们的波函数  $\psi_a(\mathbf{r}, 0)$  和  $\psi_b(\mathbf{r}, 0)$  没有重叠，可以根据  $|\psi_a(\mathbf{r}, 0)|^2$  和  $|\psi_b(\mathbf{r}, 0)|^2$  曲线区分不同粒子。
- 但随着时间变化，某时刻  $t$ ，波函数曲线可能发生交叠，如果在重叠区出现粒子，不可能区分是粒子  $a$  还是粒子  $b$ 。而且粒子是全同粒子，不能根据固有属性来区分。
- 量子力学认为：全同粒子具有不可区分性。



# 双粒子系统

- 对照单粒子系统，双粒子系统的波函数可以写为：

$$\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t)$$

- 体系的含时薛定谔方程

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H\Psi$$

其中哈密顿量为

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m_1} \nabla_1^2 - \frac{\hbar^2}{2m_2} \nabla_2^2 + V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t)$$

- 归一化条件

$$\int |\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t)|^2 d^3\mathbf{r}_1 d^3\mathbf{r}_2 = 1$$

- 体系的定态薛定谔方程为

$$-\frac{\hbar^2}{2m_1} \nabla_1^2 \psi - \frac{\hbar^2}{2m_2} \nabla_2^2 \psi + V\psi = E\psi$$

其中

$$\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t) = \psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) e^{-iEt/\hbar}$$



# 全同粒子哈密顿量的交换不变性

以双粒子为例，全同粒子体系的哈密顿量

$$H(q_1, q_2) = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_1^2 - \frac{\hbar^2}{2m} \nabla_2^2 + V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t)$$

如果假设双粒子坐标互换

$$H(q_2, q_1) = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_2^2 - \frac{\hbar^2}{2m} \nabla_1^2 + V(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1, t)$$

由于两个粒子的固有属性完全相同，可以完全扮演对方的角色：粒子1、2分别具有对方原来的状态和相互作用，两个能量算符表达式的各项对应相等。所以，两粒子为全同粒子时，坐标和自旋状态互换后，体系的能量算符保持不变：

$$H(q_1, q_2) = H(q_2, q_1)$$

此即全同粒子的交换不变性。可推广到多粒子的全同粒子体系。



# 对称和反对称波函数

假设粒子一的波函数为  $\psi_a(\mathbf{r})$  而粒子二的波函数为  $\psi_b(\mathbf{r})$ ，所以

$$\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \psi_a(\mathbf{r}_1)\psi_b(\mathbf{r}_2)$$

注意：上式假设两个粒子的波函数没有关联性，反例为波函数相互纠缠的两个粒子。

两个粒子交换位置后，虽然哈密顿量具有不变性，但他们的波函数可以区分出两种情况，即对称波函数和反对称波函数。我们可以简单地构造出一个波函数，并不确定粒子在哪个态。

$$\psi_{\pm}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = A[\psi_a(\mathbf{r}_1)\psi_b(\mathbf{r}_2) \pm \psi_b(\mathbf{r}_1)\psi_a(\mathbf{r}_2)]$$

对称的情况为玻色子，即

$$\psi_+(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = A[\psi_a(\mathbf{r}_1)\psi_b(\mathbf{r}_2) + \psi_b(\mathbf{r}_1)\psi_a(\mathbf{r}_2)]$$

反对称的情况为费米子，即

$$\psi_-(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = A[\psi_a(\mathbf{r}_1)\psi_b(\mathbf{r}_2) - \psi_b(\mathbf{r}_1)\psi_a(\mathbf{r}_2)]$$



# 泡利不相容原理

泡利不相容原理：两个全同的费米子不可能占据同一个状态。

假如费米子占据同一状态

$$\psi_a = \psi_b$$

$$\begin{aligned}\psi_-(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) &= A[\psi_a(\mathbf{r}_1)\psi_b(\mathbf{r}_2) - \psi_b(\mathbf{r}_1)\psi_a(\mathbf{r}_2)] \\ &= A[\psi_a(\mathbf{r}_1)\psi_a(\mathbf{r}_2) - \psi_a(\mathbf{r}_1)\psi_a(\mathbf{r}_2)] = 0\end{aligned}$$

波函数为0。这就是泡利不相容原理。

费米子：自旋为半整数的粒子，如电子，质子，中子等，服从费米-狄拉克统计规律。

玻色子：自旋为零或者整数的粒子，如光子，服从玻色-爱因斯坦统计规律。



# 交换算符

在一些情况下，我们不需要定义  $\psi_a(\mathbf{r})$  和  $\psi_b(\mathbf{r})$ ，而是使用交换算符  $P$ ：

$$Pf(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = f(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1)$$

很容易看出  $P^2 = 1$ ， $P$  的本征值为  $\pm 1$ 。

如果两个粒子是全同的，满足  $m_1 = m_2$  和  $V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = V(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1)$ ，很容易验证  $P$  和  $H$  可对易。

$$[P, H] = 0$$

因此，我们可以找到一组完备的波函数，它们同时是  $P$  和  $H$  的本征态。

$$\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \pm \psi(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1)$$

粒子为玻色子时取正号，为费米子时取负号。

# 平均距离

假设有两个粒子，一个处于  $\psi_a(x)$ ，另一个处于  $\psi_b(x)$ ，两者正交归一。如果两者可区分，即

$$\psi(x_1, x_2) = \psi_a(x_1)\psi_b(x_2)$$

如果两个全同的玻色子，满足

$$\psi_+(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_a(x_1)\psi_b(x_2) + \psi_b(x_1)\psi_a(x_2)]$$

如果两个全同的费米子，满足

$$\psi_-(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_a(x_1)\psi_b(x_2) - \psi_b(x_1)\psi_a(x_2)]$$

两个粒子之间的平均距离为：

$$\langle (x_1 - x_2)^2 \rangle = \langle x_1^2 \rangle + \langle x_2^2 \rangle - 2\langle x_1 x_2 \rangle \dots\dots\dots ①$$

# 可区分的粒子

$$\psi(x_1, x_2) = \psi_a(x_1)\psi_b(x_2)$$

分别计算①式中的各项

$$\langle x_1^2 \rangle = \int x_1^2 |\psi_a(x_1)|^2 dx_1 \int |\psi_b(x_2)|^2 dx_2 = \langle x^2 \rangle_a$$

$$\langle x_2^2 \rangle = \int |\psi_a(x_1)|^2 dx_1 \int x_2^2 |\psi_b(x_2)|^2 dx_2 = \langle x^2 \rangle_b$$

$$\langle x_1 x_2 \rangle = \int x_1 |\psi_a(x_1)|^2 dx_1 \int x_2 |\psi_b(x_2)|^2 dx_2 = \langle x \rangle_a \langle x \rangle_b$$

因此

$$\langle (x_1 - x_2)^2 \rangle_a = \langle x^2 \rangle_a + \langle x^2 \rangle_b - 2\langle x \rangle_a \langle x \rangle_b$$



# 全同粒子(1)

$$\psi_{\pm}(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_a(x_1)\psi_b(x_2) \pm \psi_b(x_1)\psi_a(x_2)]$$

代入玻色子和费米子的波函数，分别计算①式中的各项

$$\begin{aligned} \langle x_1^2 \rangle &= \frac{1}{2} \left[ \int x_1^2 |\psi_a(x_1)|^2 dx_1 \int |\psi_b(x_2)|^2 dx_2 + \int x_1^2 |\psi_b(x_2)|^2 dx_1 \int |\psi_a(x_1)|^2 dx_2 \right. \\ &\quad \left. \pm \int x_1^2 \psi_a(x_1)^* \psi_b(x_1) dx_1 \int \psi_b(x_2)^* \psi_a(x_2) dx_2 \pm \int x_1^2 \psi_b(x_1)^* \psi_a(x_1) dx_1 \int \psi_a(x_2)^* \psi_b(x_2) dx_2 \right] \\ &= \frac{1}{2} (\langle x^2 \rangle_a + \langle x^2 \rangle_b) \end{aligned}$$

同理有:

$$\langle x_2^2 \rangle = \frac{1}{2} (\langle x^2 \rangle_a + \langle x^2 \rangle_b)$$

所以

$$\langle x_1^2 \rangle = \langle x_2^2 \rangle$$



## 全同粒子(2)

$$\psi_{\pm}(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_a(x_1)\psi_b(x_2) \pm \psi_b(x_1)\psi_a(x_2)]$$

$$\begin{aligned}\langle x_1 x_2 \rangle &= \frac{1}{2} \left[ \int x_1 |\psi_a(x_1)|^2 dx_1 \int x_2 |\psi_b(x_2)|^2 dx_2 + \int x_1 |\psi_b(x_1)|^2 dx_1 \int x_2 |\psi_a(x_2)|^2 dx_2 \right. \\ &\quad \left. \pm \int x_1 \psi_a(x_1)^* \psi_b(x_1) dx_1 \int x_2 \psi_b(x_2)^* \psi_a(x_2) dx_2 \pm \int x_1 \psi_b(x_1)^* \psi_a(x_1) dx_1 \int x_2 \psi_a(x_2)^* \psi_b(x_2) dx_2 \right] \\ &= \frac{1}{2} (\langle x \rangle_a \langle x \rangle_b + \langle x \rangle_b \langle x \rangle_a \pm \langle x \rangle_{ab} \langle x \rangle_{ba} \pm \langle x \rangle_{ba} \langle x \rangle_{ab}) \\ &= \langle x \rangle_a \langle x \rangle_b \pm |\langle x \rangle_{ab}|^2\end{aligned}$$

其中

$$\langle x \rangle_{ab} \equiv \int x \psi_a(x)^* \psi_b(x) dx$$

所以

$$\langle (x_1 - x_2)^2 \rangle_{\pm} = \langle x^2 \rangle_a + \langle x^2 \rangle_b - 2\langle x \rangle_a \langle x \rangle_b \mp |\langle x \rangle_{ab}|^2$$

相比可区分粒子，不同之处在于

$$\langle (\Delta x)^2 \rangle_{\pm} = \langle (\Delta x)^2 \rangle_d \mp |\langle x \rangle_{ab}|^2$$

# 玻色子和费米子

$$\langle x \rangle_{ab} \equiv \int x \psi_a(x)^* \psi_b(x) dx$$

让我们观察一下

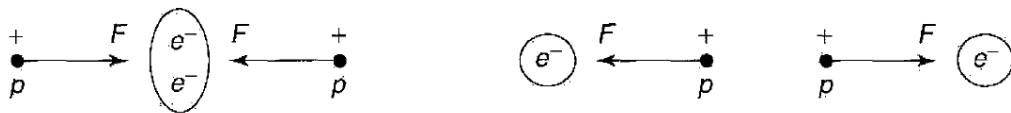
$$\langle (\Delta x)^2 \rangle_{\pm} = \langle (\Delta x)^2 \rangle_d \mp |\langle x \rangle_{ab}|^2$$

玻色子会倾向于聚集在一起，而费米子会倾向于分离。

注意:除非两个粒子的波函数有重叠，否则 $\langle x \rangle_{ab} = 0$ 。我们假设没有波函数重叠的粒子可区分。

对于两个有波函数有重叠的粒子，我们发现一个有趣的现象。全同粒子体系似乎有外力作用一样，当粒子是玻色子时，它们相互靠近，这个力是吸引力；当粒子是费米子时，它们相互远离，这个力是排斥力。这种实际上不存在的力，我们称之为**交换力**。

这个力是经典物理无法解释的，却导致了非常深远的结果。如果我们考虑一个氢分子，负电荷的电子会倾向于分离，导致两个氢原子相互远离。但是这里我们没有考虑自旋的作用。正是由于电子自旋的存在，形成了氢原子之间的共价键。



# 参考文献

---

- 费米子与玻色子主要参考：
  - 教材David J. Griffiths, and Darrell F. Schroeter, Introduction to Quantum Mechanics (3rd Edition), Cambridge University Press (2018). 第5.1节。
- 全同粒子和泡利不相容原理的一般形式可补充阅读：
  - 仲顺安等，理论物理导论（第3版），北京理工大学出版社。第6-4小节的内容。



## C5-2 宏观态和微观态



# 课程回顾

## 玻色子与费米子：

- 在量子力学中，全同粒子具有不可区分性。以二粒子体系为例，在粒子波函数的重叠区域，不可能区分粒子 a 还是粒子 b。
- 全同粒子的哈密顿量具有交换不变性  $H(q_1, q_2) = H(q_2, q_1)$ 。
- 两个粒子交换位置后，虽然哈密顿量具有不变性，但他们的波函数可以区分出两种情况，即对称波函数和反对称波函数，对应于玻色子和费米子。
- 对于两个波函数有重叠的粒子  $\langle (\Delta x)^2 \rangle_{\pm} = \langle (\Delta x)^2 \rangle_d \mp |\langle x \rangle_{ab}|^2$ 。当粒子是玻色子时，它们相互靠近，这个力是吸引力；当粒子是费米子时，它们相互远离，这个力是排斥力。这种实际上不存在的力，我们称之为交换力。



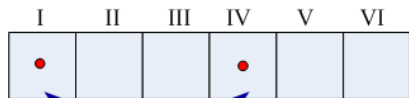
# 相空间与相格

- 考虑单原子分子组成的气体，每个分子在任意时刻的运动状态，由三个空间坐标  $x, y, z$  和三个动量坐标  $p_x, p_y, p_z$  确定。相空间即  $x, y, z, p_x, p_y, p_z$  组成的六维空间。每个分子占据的相空间体积元为  $dx dy dz dp_x dp_y dp_z$ 。
- 统计物理的一个基本问题：在热平衡时，如果有  $N$  个粒子，随机选取一个粒子，它的能量处于  $E_j$  的概率是多少？用分子相空间来描述该问题：研究分子代表点在分子相空间的分布。
- 在经典统计中，一个质点的位置和动量同时可以确定到任意精度，所以可以把一个粒子的运动状态用分子相空间的一个点来表示。
- 在量子力学中，有不确定性关系  $\Delta x \Delta y \Delta z \Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z \geq (\hbar/2)^3$ ，所以一个粒子在相空间的位置，在最好的情况下，也只能确定到大小为  $(\hbar/2)^3$  的量级范围。 $(\hbar/2)^3$  被称为一个相格，一个相格对应微观粒子的一个状态。

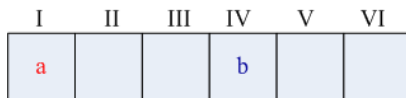


# 量子统计

- 如下图所示，两个相格中的粒子互换状态，是否构成新的微观态？此问题涉及到粒子的全同性问题。
- 经典力学中，即便两个粒子的固有属性相同，但每个粒子有自己确定的轨道，原则上可追踪和区分，所以上述的两粒子状态互换代表两种不同的微观态。而在量子力学，全同粒子不可分辨，两粒子互换后，与原状态没有区别，不表示新的微观态！
- 微观态计数方法的不同，是经典统计和量子统计的重大区别。而对于宏观态（比如温度），粒子互换不改变相空间体积元中的粒子数，无论粒子是否可区分，宏观态不变。



量子统计



(a)



(b)

经典统计

# 宏观态与微观态(1)

---

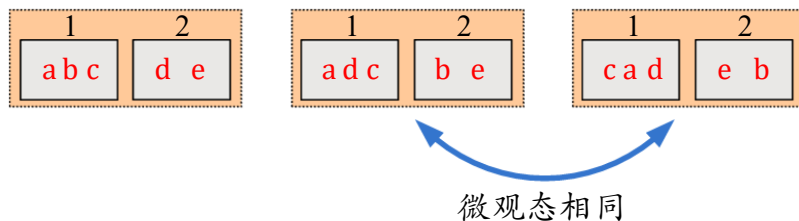
- 用宏观参量来描述一个处于平衡态的系统，可以说确立了系统的宏观态。从统计物理角度的描述：系统在平衡状态下，各相空间体积元的粒子数分布是确定的，因为粒子按能量的分布决定了系统的状态。微观态，是指微观粒子的力学状态。详细指明每个微观粒子处于某个相空间体积元的某个相格中，才算确定一个微观态。
- 无论在经典统计还是量子统计中，一种宏观态可对应多种微观态。当系统处于平衡态时，宏观性质长期不变，即宏观态不变，但微观粒子不断运动，即微观态不断变化。
- 问题的关键：如何计算一种宏观态对应的微观态的数目？下面举例说明经典统计（粒子可编号）下的情况，然后再讨论量子统计的情况。



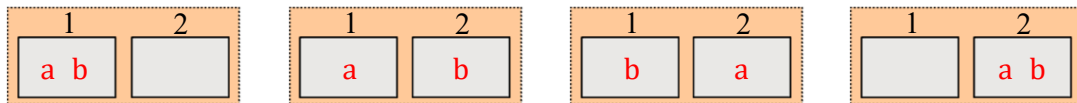
# 宏观态与微观态(2)

例1. 5个粒子在两个相格中。

宏观态:  $N_1 = 3, N_2 = 2$



例2. 2个粒子在两个相格中



结果: 3种宏观态, 4种微观态, 3种宏观态出现的概率不同!

默认: (1) 粒子占据1和2 的概率相同; (2) 不同宏观态概率不同, 但是不同微观态概率相同。

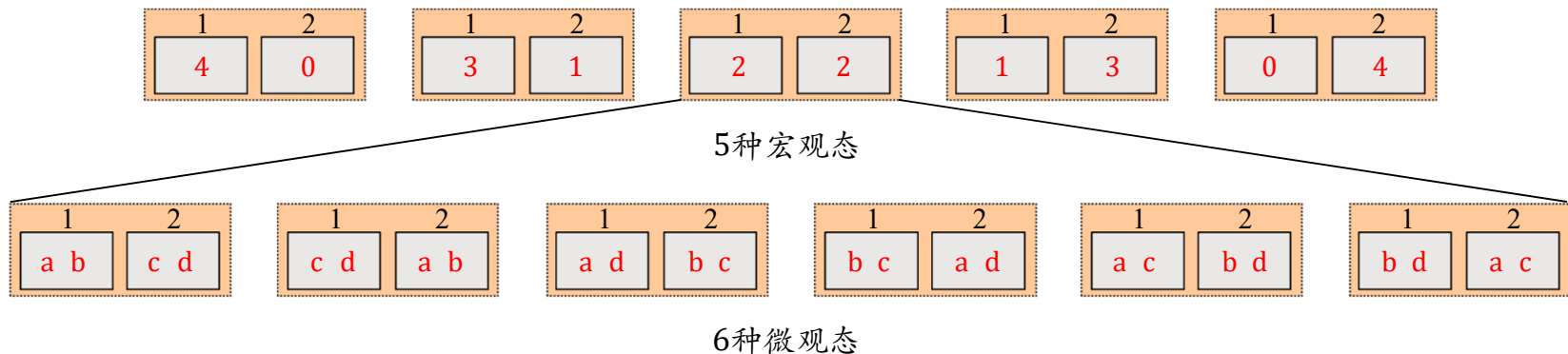
# 等概率原理

- 前面的例子中，提到各种微观态出现的概率是一样的，实际上隐含不言而喻的假定：同样的粒子占据同样的相格的概率是相同的。实际上该假定跟统计物理学中最基本的假设——等概率原理相联系。
- 等概率原理：处于统计平衡状态的孤立系统，其所有可能出现的微观态出现的概率是相等的。另一种描述：相空间中的代表点出现在可能进入的大小相等的体积元中的概率是相等的。
- 对于四个粒子，两个相格这样的例子，上述等概率原理容易理解。对于气体分子在分子相空间中的分布，比如，一种微观态是所有气体分子都集中到容器的一角，而另一种微观态的分子相对均匀分布，实际上这两种微观态出现的概率是一样的！
- 等概率原理是无法直接验证的，其带有先验的性质，其正确与否只能由它推论出来的结果是否与实验事实相符来判定。基于等概率原理：一种宏观态所对应的微观态的数目越多，则这种宏观态出现的概率就越大。



# 宏观态与微观态(3)

例3. 4个粒子在两个相格中



结果：微观态有  $2^4 = 16$  种，而宏观态只有 5 种。每种微观态出现的概率  $1/16$ 。

第一个相格中有 4 个粒子的宏观态只对应一种微观态，所以这种宏观态出现的概率是  $1/16$ 。均匀分配这种宏观态对应的微观态有  $C_4^2 = 6$  种，所以，这种宏观态出现的概率为  $6/16$ 。

# 宏观态与微观态(4)

例4.  $N$ 个粒子在两个相格中

假设粒子在相格1中出现的概率为  $P$ ，在相格2中出现的概率为  $Q$ 。在相格1中有粒子  $N - r$ ，在相格2中有粒子  $r$ ，这种宏观态出现的概率是：

$$C_N^{N-r} P^{N-r} Q^r = \frac{N!}{(N-r)! r!} P^{N-r} Q^r$$

其中  $C_N^{N-r} = \frac{N!}{(N-r)! r!}$  代表这种宏观态对应的微观态的数目。而  $P^{N-r} Q^r$  为对应的微观态出现的概率。

如果  $P = Q = 1/2$ ，则  $P^{N-r} Q^r = (1/2)^N$ 。而  $2^N$  正是  $N$  个粒子在两个相格中的全部方式的数目，因为任何一种方式出现的概率一样，即每个微观态出现的概率一样，都是  $1/2^N$ 。



# 能量对应的微观态(1)

上面讨论的宏观态是粒子数分布，下面我们来看一下如果系统总能量是宏观态所对应的微观态的情况。

例5. 3个粒子在一维无限深势阱中（可区分玻色子）

体系总能量可以写为：
$$E = E_A + E_B + E_C = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} (n_A^2 + n_B^2 + n_C^2)$$

我们假设系统能量为  $E = 363 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2}$ ，也就是  $n_A^2 + n_B^2 + n_C^2 = 363$ 。

我们发现  $(n_A, n_B, n_C)$  的排列方式有以下13种。如果每个粒子都可区分，则对应了13种微观态。

$$\begin{aligned} & (11, 11, 11) \\ & (13, 13, 5) \quad (13, 5, 13) \quad (5, 13, 13) \\ & (1, 1, 19) \quad (1, 19, 1) \quad (19, 1, 1) \\ & (5, 7, 17) \quad (5, 17, 7) \quad (7, 5, 17) \quad (7, 17, 5) \quad (17, 5, 7) \quad (17, 7, 5) \end{aligned}$$



## 能量对应的微观态(2)

如果我们只在意每个  $\psi_n$  态上的占有数  $N_n$ ，我们把所有态上占有数的集合称之为组态。

1. 如果三个粒子都处于  $\psi_{11}$  态上，其组态为 ( $N_{11} = 3$ ，其他等于0)：  
(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, ...)
2. 如果两个粒子处于  $\psi_{13}$  态上，一个处于  $\psi_5$  态上，其组态为：  
(0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, ...)
3. 如果两个粒子处于  $\psi_1$  态上，一个处于  $\psi_{19}$  态上，其组态为：  
(2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, ...)
4. 如果一个粒子处于  $\psi_5$  态上，一个处于  $\psi_7$  态上，一个处于  $\psi_{17}$  态上，其组态为：  
(0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, ...)

我们知道组态4是出现概率最大的组态，因为它有6种不同的排列；组态2和3分别有3种排列；组态1只有1种排列。

# 微观态的概率(1)

统计物理的一个基本问题：在热平衡时，如果有 $N$ 个粒子，随机选取一个粒子，它的能量处于 $E_j$ 的概率是多少？

- 在例5中，三个粒子中随机地选取一个，那么该粒子的能量为 $E_n$ 的概率 $P_n$ 是多少呢？

(11, 11, 11)  
(13, 13, 5) (13, 5, 13) (5, 13, 13)  
(1, 1, 19) (1, 19, 1) (19, 1, 1)  
(5, 7, 17) (5, 17, 7) (7, 5, 17) (7, 17, 5) (17, 5, 7) (17, 7, 5)

假如 $n=1$ ，只有在组态3, (2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, ...)，中存在 $E_1$ 。而这种组态有三种可能的微观态，(1, 1, 19) (1, 19, 1) (19, 1, 1)。

所以 $P_1 = (3/13) \times (2/3) = 2/13$ 。大家可以验证一下

$$P_1 + P_5 + P_7 + P_{11} + P_{13} + P_{17} + P_{19} = \frac{2}{13} + \frac{3}{13} + \frac{2}{13} + \frac{1}{13} + \frac{2}{13} + \frac{2}{13} + \frac{1}{13} = 1$$



## 微观态的概率(2)

例6. 3个粒子在一维无限深势阱中 (全同费米子)

$$\begin{aligned} & (11, 11, 11) \\ & (13, 13, 5) \quad (13, 5, 13) \quad (5, 13, 13) \\ & (1, 1, 19) \quad (1, 19, 1) \quad (19, 1, 1) \\ & (5, 7, 17) \quad (5, 17, 7) \quad (7, 5, 17) \quad (7, 17, 5) \quad (17, 5, 7) \quad (17, 7, 5) \end{aligned}$$

可以验证

$$P_5 + P_7 + P_{17} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$$

例7. 3个粒子在一维无限深势阱中 (全同玻色子)

$$\begin{aligned} & (11, 11, 11) \\ & (13, 13, 5) \quad (13, 5, 13) \quad (5, 13, 13) \\ & (1, 1, 19) \quad (1, 19, 1) \quad (19, 1, 1) \\ & (5, 7, 17) \quad (5, 17, 7) \quad (7, 5, 17) \quad (7, 17, 5) \quad (17, 5, 7) \quad (17, 7, 5) \end{aligned}$$

可以验证

$$P_1 + P_5 + P_7 + P_{11} + P_{13} + P_{17} + P_{19} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = 1$$

# 最概然组态

在例5中

$$\begin{aligned} & (11, 11, 11) \\ & (13, 13, 5) \quad (13, 5, 13) \quad (5, 13, 13) \\ & (1, 1, 19) \quad (1, 19, 1) \quad (19, 1, 1) \\ & (5, 7, 17) \quad (5, 17, 7) \quad (7, 5, 17) \quad (7, 17, 5) \quad (17, 5, 7) \quad (17, 7, 5) \end{aligned}$$

$N_5 = N_7 = N_{17} = 1$ 出现的可能性最大，我们称之为最概然组态。

在现实中， $N$  值变得极大，最概然组态的概率将远远大于其他情况。因而在统计上我们完全可以忽略其他所有组态的存在！因此在平衡时，粒子的能量分布为其概率最大的组态。

# 参考文献

---

- 宏观态和微观态主要参考：
  - 教材David J. Griffiths, Introduction to Quantum Mechanics (2nd Edition), Cambridge University Press (2018). 第5.4节（注意是该书第二版）。
  - 仲顺安等，理论物理导论（第3版），北京理工大学出版社。第13-3小节的内容。
- 排列组合的基础知识
  - 仲顺安等，理论物理导论（第3版），北京理工大学出版社。第13章附录I的内容。



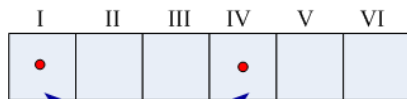
## C5-3 最概然组态和最概然分布



# 课程回顾

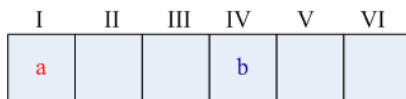
## 宏观态与微观态：

- 量子力学中的全同粒子不可分辨，两粒子互换后，与原状态没有区别，不表示新的微观态。微观态计数方法的不同，是经典统计和量子统计的重大区别。
- 等概率原理：处于统计平衡状态的孤立系统，其所有可能出现的微观态出现的概率是相等的。
- 统计物理的一个基本问题：在平衡状态时，如果有 $N$ 个粒子，随机选取一个粒子，它的能量处于 $E_j$ 的概率是多少？

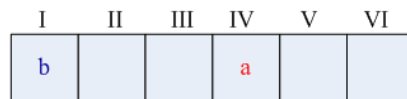


两粒子互换

量子统计



(a)



(b)

经典统计

全同粒子与统计

32



浙江大学

# 一般情况(1)

- 考虑在势场中的单粒子本征能量为  $E_1, E_2, E_3, \dots$ ，对应的简并度分别为  $d_1, d_2, d_3, \dots$ 。假设有  $N$  个粒子的组态为  $(N_1, N_2, N_3, \dots)$ ，问总共对应多少个微观态  $Q(N_1, N_2, N_3, \dots)$ ？

例1. 可分辨粒子

对于  $E_1$

$$C_N^{N_1} \equiv \frac{N!}{N_1! (N - N_1)!}$$

放入  $d_1$  个简并态中

$$Q(N_1) = C_N^{N_1} d_1^{N_1} = \frac{N! d_1^{N_1}}{N_1! (N - N_1)!}$$

同理对于  $E_2$  和  $d_2$

$$Q(N_2) = C_{N-N_1}^{N_2} d_2^{N_2} = \frac{(N - N_1)! d_2^{N_2}}{N_2! (N - N_1 - N_2)!}$$

所以

$$Q(N_1, N_2, N_3, \dots) = \frac{N! d_1^{N_1}}{N_1! (N - N_1)!} \frac{(N - N_1)! d_2^{N_2}}{N_2! (N - N_1 - N_2)!} \frac{(N - N_1 - N_2)! d_3^{N_3}}{N_3! (N - N_1 - N_2 - N_3)!} \dots$$

$$Q(N_1, N_2, N_3, \dots) = N! \prod_{n=1}^{\infty} \frac{d_n^{N_n}}{N_n!}$$

全同粒子与统计



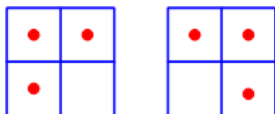
## 一般情况(2)

### 例2. 全同费米子

全同费米子不可分辨，而且每个粒子态最多只能容纳一个粒子，所以

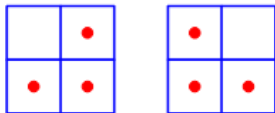
$$Q(N_n) = C_{d_n}^{N_n} = \frac{d_n!}{N_n! (d_n - N_n)!}$$

$$Q(N_1, N_2, N_3, \dots) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{d_n!}{N_n! (d_n - N_n)!} \dots\dots\dots 2$$



实验：3个全同费米子在4个粒子态中的安排方式：

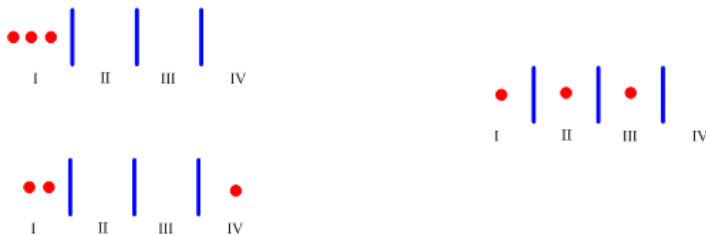
$$C_4^3 = 4$$



# 一般情况(2)

## 例3. 全同玻色子

全同玻色子不可分辨，但每个粒子态可容纳多个粒子。可以将粒子和相格写成一行，实际上相当于将  $N$  个粒子和  $d-1$  个间壁进行组合。

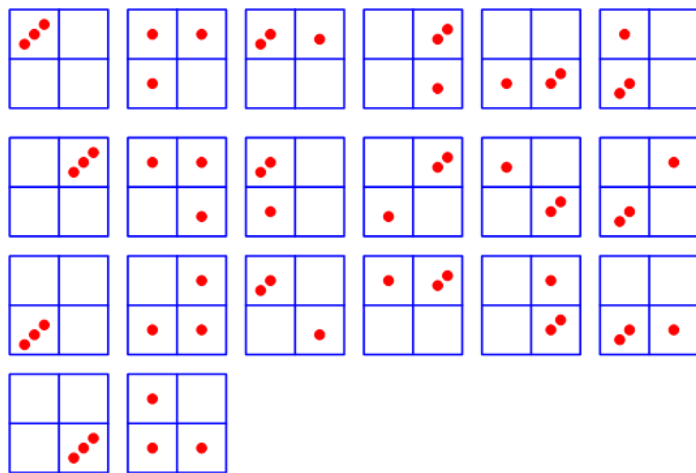


$$Q(N_n) = C_{N_n+d_n-1}^{N_n} = \frac{(N_n + d_n - 1)!}{N_n! (d_n - 1)!}$$

$$Q(N_1, N_2, N_3, \dots) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(N_n + d_n - 1)!}{N_n! (d_n - 1)!}$$

..... ③

## 一般情况(3)



实验：三个全同玻色子在4个粒子态中的排列。

$$Q(3) = C_{3+4-1}^3 = 20$$

# 拉格朗日乘子法

求解受条件 $f_1(x_1, x_2, x_3, \dots) = 0$ ,  $f_2(x_1, x_2, x_3, \dots) = 0 \dots$ 等条件约束的多变量函数 $F(x_1, x_2, x_3, \dots)$ 的极大值可以采用拉格朗日乘子法。

引入一个新函数： $G(x_1, x_2, x_3, \dots, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots) \equiv F + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 + \dots$

并令它所有的偏微分为零，即

$$\frac{\partial G}{\partial x_n} = 0 \qquad \frac{\partial G}{\partial \lambda_n} = 0$$



# 最概然组态(1)

- 平衡状态时，具有总能量为 $E$ ，粒子数为 $N$ 的每个微观态出现的概率都是相等的。最概然组态即满足 $Q(N_1, N_2, N_3, \dots)$ 取极大值的 $(N_1, N_2, N_3, \dots)$ ，这时有

$$\sum_{n=1}^{\infty} N_n = N$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} N_n E_n = E$$

引入一个新函数

$$G \equiv \ln(Q) + \alpha \left[ N - \sum_{n=1}^{\infty} N_n \right] + \beta \left[ E - \sum_{n=1}^{\infty} N_n E_n \right] \dots\dots\dots 4$$

下面我们将应用拉格朗日乘法。

# 最概然组态(2)

$$Q(N_1, N_2, N_3, \dots) = N! \prod_{n=1}^{\infty} \frac{d_n^{N_n}}{N_n!}$$

例1. 可分辨粒子

将①代入④得到

$$G = \ln(N!) + \sum_{n=1}^{\infty} [N_n \ln(d_n) - \ln(N_n!)] + \alpha \left[ N - \sum_{n=1}^{\infty} N_n \right] + \beta \left[ E - \sum_{n=1}^{\infty} N_n E_n \right]$$

利用斯特林近似

$$\ln(z!) \approx z \ln(z) - z, \quad z \gg 1$$

$$G \approx \sum_{n=1}^{\infty} [N_n \ln(d_n) - N_n \ln(N_n) + N_n - \alpha N_n - \beta N_n E_n] + \ln(N!) + \alpha N + \beta E$$

所以

$$\frac{\partial G}{\partial N_n} = \ln(d_n) - \ln(N_n) - \alpha - \beta E_n = 0$$

最概然组态为:

$$N_n = d_n e^{-(\alpha + \beta E_n)}$$



# 最概然组态(3)

$$Q(N_1, N_2, N_3, \dots) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{d_n!}{N_n! (d_n - N_n)!}$$

例2. 全同费米子

将②代入④得到

$$G = \sum_{n=1}^{\infty} \{ \ln(d_n!) - \ln(N_n!) - \ln[(d_n - N_n)!] \} + \alpha \left[ N - \sum_{n=1}^{\infty} N_n \right] + \beta \left[ E - \sum_{n=1}^{\infty} N_n E_n \right]$$

利用斯特林近似

$$G \approx \sum_{n=1}^{\infty} [ \ln(d_n!) - N_n \ln(N_n) + N_n - (d_n - N_n) \ln(d_n - N_n) + (d_n - N_n) - \alpha N_n - \beta N_n E_n ] + \alpha N + \beta E$$

所以

$$\frac{\partial G}{\partial N_n} = -\ln(N_n) + \ln(d_n - N_n) - \alpha - \beta E_n = 0$$

最概然组态为:

$$N_n = \frac{d_n}{e^{(\alpha + \beta E_n)} + 1}$$



# 最概然组态(4)

$$Q(N_1, N_2, N_3, \dots) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(N_n + d_n - 1)!}{N_n! (d_n - 1)!}$$

例3. 全同玻色子

将③代入④得到

$$G = \sum_{n=1}^{\infty} \{ \ln[(N_n + d_n - 1)!] - \ln(N_n!) - \ln[(d_n - 1)!] \} + \alpha \left[ N - \sum_{n=1}^{\infty} N_n \right] + \beta \left[ E - \sum_{n=1}^{\infty} N_n E_n \right]$$

利用斯特林近似

$$G \approx \sum_{n=1}^{\infty} [(N_n + d_n - 1) \ln(N_n + d_n - 1) - (N_n + d_n - 1) - N_n \ln(N_n) + N_n - \ln[(d_n - 1)!] - \alpha N_n - \beta N_n E_n] + \alpha N + \beta E$$

所以

$$\frac{\partial G}{\partial N_n} = \ln(N_n + d_n - 1) - \ln(N_n) - \alpha - \beta E_n = 0$$

最概然组态为:

$$N_n = \frac{d_n - 1}{e^{(\alpha + \beta E_n)} - 1}$$



# 最概然分布(不做要求)

---

- 经典统计物理关心粒子在空间的分布情况。由于分子不停运动，微观态不停改变。希望求得热力学概率最大的分子分布方式，即最概然分布，意味着宏观态出现的概率最大。
- 从宏观上看，孤立系统最终会达到热平衡状态，从统计物理角度看，就是系统自发趋于热力学概率最大的状态。
- 最概然分布也叫最可几分布。
- 结论：热力学概率最大的条件为粒子均匀地分布于它所占据的空间内。



# 熵的物理意义(不做要求)



- 在热力学中，孤立系统发生的任何变化，是朝熵增加的方向（熵增原理），系统趋向平衡态，熵趋于极大。
- 从统计物理的观点看，平衡态对应于热力学概率最大的宏观态，粒子的分布为最概然分布。
- 玻耳兹曼于1877年在其论文中，运用概率方法进行推算，把熵  $S$  与热力学概率  $W$  联系起来，从而得出热力学第二定律是关于概率定律的重要结论。1900年，物理学家普朗克将玻耳兹曼的熵与热力学概率的关系简写为：

$$S = k \ln W$$

- 玻耳兹曼通过熵与热力学概率的联系，直接沟通了热力学系统的宏观与微观之间的关联，并对热力学第二定律进行了微观解释。玻耳兹曼通过建立熵与几率的联系，不仅把熵与分子运动的无序程度联系起来，而且使热力学第二定律具有统计上的可靠性。

# 熵增原理的统计解释(不做要求)

- 熵增原理：孤立系统的熵永远增加。
- 气体自由膨胀熵增加，从统计物理的角度看，是一个系统自发地由小概率的状态趋向大概率的状态，最终趋于平衡态，此时熵极大。熵的增加也可以看出系统的有序程度降低，无序程度提高的过程，熵增原理表明，孤立系统趋向无序状态，即均匀分布的状态。
- 系统的熵与其出现的热力学概率对应，熵的增加与系统自发趋向最概然状态相对应。这样热力学第二定律，即熵增原理，可以看成统计性质的规律，宏观上的不可逆性也就成为统计性质的结论。
- 理论上，孤立系统熵的减少并非不可能，只是概率极低，实际上也就是不可能。



# 参考文献

---

- 最概然组态主要参考：
  - 教材David J. Griffiths, Introduction to Quantum Mechanics (2nd Edition), Cambridge University Press (2018). 第5.4节（注意是该书第二版）。
  - 仲顺安等，理论物理导论（第3版），北京理工大学出版社。第13-5小节的内容。
- 熵增原理主要参考：
  - 仲顺安等，理论物理导论（第3版），北京理工大学出版社。第13-5，13-6小节的内容。



## C5-4 统计分布和黑体光谱



# 课程回顾

最概然组态和最概然分布：

- 考虑在势场中的单粒子本征能量为 $E_1, E_2, E_3, \dots$ ，对应的简并度分别为 $d_1, d_2, d_3, \dots$ 。假设有 $N$ 个粒子的组态为 $(N_1, N_2, N_3, \dots)$ ，求最概然组态。
- 利用拉格朗日乘子法，计算出三种情况下的最概然组态分别为：

a) 可分辨粒子

$$N_n = d_n e^{-(\alpha + \beta E_n)}$$

b) 全同费米子

$$N_n = \frac{d_n}{e^{(\alpha + \beta E_n)} + 1}$$

c) 全同玻色子

$$N_n = \frac{d_n - 1}{e^{(\alpha + \beta E_n)} - 1}$$

- 热力学概率最大的分子分布方式，即最概然分布，为粒子均匀地分布于它所占据的空间内，即系统熵处于极大值的状态。



# 三种统计模型

- 微观粒子可分辨，可编号。分子相空间分成若干体积元，每个体积元可以分成若干相格，每个体积元中的相格数不必相同，每个体积元中的相格数可以多于或者小于体积元中的粒子数  $N$ ，每个微观粒子可自由选择任意体积元中的任意相格，无任何限制——对应经典统计，即麦克斯韦-玻尔兹曼统计。
- 微观粒子不可分辨，不可编号。其它与上一个模型相同——对应玻色-爱因斯坦统计。
- 微观粒子除了不可分辨，不可编号之外，还要加上一个限制，每个相格中，最多只能放一个粒子，但相格可以空着，这相当于泡利不相容原理的模型化——对应于费米-狄拉克统计。
- 上述三个模型中，同一个相空间体积元中的微观粒子能量视为相同，对应于量子力学中的能级，每个相格对应于一个量子态，相格数相当于量子力学中的简并度。



# 三种统计的热力学概率和分布函数

- 表格总结了三种统计分布的热力学概率公式和分布函数公式

|       | 麦克斯韦-玻尔兹曼统计                                          | 玻色-爱因斯坦统计                                                           | 费米-狄拉克统计                                                  |
|-------|------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------|
| 热力学概率 | $Q = N! \prod_{n=1}^{\infty} \frac{d_n^{N_n}}{N_n!}$ | $Q = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(N_n + d_n - 1)!}{N_n! (d_n - 1)!}$ | $Q = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{d_n!}{N_n! (d_n - N_n)!}$ |
| 分布函数  | $N_n = d_n e^{-(\alpha + \beta E_n)}$                | $N_n = \frac{d_n - 1}{e^{(\alpha + \beta E_n)} - 1}$                | $N_n = \frac{d_n}{e^{(\alpha + \beta E_n)} + 1}$          |

- 当 $e^{(\alpha + \beta E_n)} \gg 1$ 成立, 玻色-爱因斯坦统计和费米-狄拉克统计都趋向经典统计, 即麦克斯韦-玻尔兹曼统计, 即经典近似条件。

# 理想气体(1)

- 理想气体（自由电子气模型）：气体中存在大量无相互作用的粒子，它们质量相等，处于三维无限深势阱中。参照自由电子模型中的能量表达式：

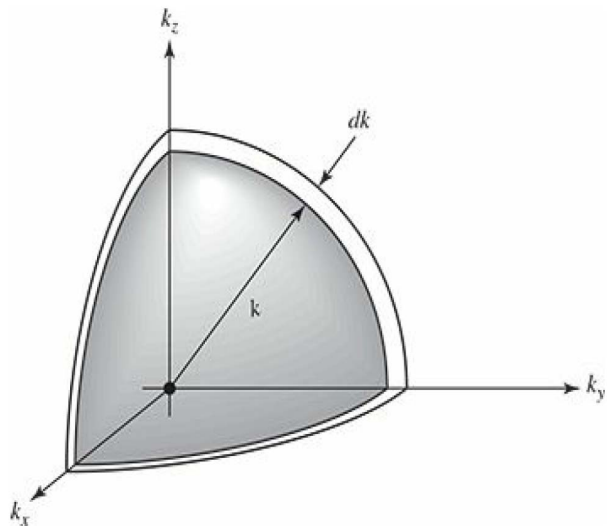
$$E_n = \frac{\hbar^2}{2m} k^2$$

其中

$$k = \left( \frac{\pi n_x}{l_x}, \frac{\pi n_y}{l_y}, \frac{\pi n_z}{l_z} \right)$$

在相应能量上的简并度为

$$d_k = \frac{1}{8} \frac{4\pi k^2 dk}{\pi^3/V} = \frac{V}{2\pi^2} k^2 dk$$



# 理想气体(2)

$$N_n = d_n e^{-(\alpha + \beta E_n)}$$

- 对于可分辨粒子的总粒子数

$$N = \frac{V}{2\pi^2} e^{-\alpha} \int_0^\infty e^{-\beta \hbar^2 k^2 / 2m} k^2 dk = V e^{-\alpha} \left( \frac{m}{2\pi\beta\hbar^2} \right)^{3/2}$$
$$\therefore e^{-\alpha} = \frac{N}{V} \left( \frac{2\pi\beta\hbar^2}{m} \right)^{3/2}$$

- 对于可分辨粒子的总能量

$$E = \frac{V}{2\pi^2} e^{-\alpha} \frac{\hbar^2}{2m} \int_0^\infty e^{-\beta \hbar^2 k^2 / 2m} k^4 dk = \frac{3V}{2\beta} e^{-\alpha} \left( \frac{m}{2\pi\beta\hbar^2} \right)^{3/2}$$
$$E = \frac{3N}{2\beta}$$

如果把自旋的简并度加入计算，会得到一样的上式，所以上式对所有自旋的情况都是适用的。



# 理想气体(3)

$$E = \frac{3N}{2\beta}$$

能量均分定理：经典统计中描述温度  $T$  下原子的平均动能为：

$$E = \frac{3}{2} k_B T N \quad \dots\dots\dots 1$$

其中  $k_B$  为玻尔兹曼常数。

所以

$$\beta = \frac{1}{k_B T}$$

通常把  $\alpha$  用化学势来代换

所以

$$\mu(T) = -\alpha k_B T$$

$$\alpha = -\frac{\mu(T)}{k_B T}$$



# 分布函数

- 理想气体（自由电子气）的统计分布函数化为：

|      | 麦克斯韦-玻尔兹曼统计                                     | 玻色-爱因斯坦统计                                                    | 费米-狄拉克统计                                                     |
|------|-------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------|
| 分布函数 | $n(\varepsilon) = e^{-(\varepsilon-\mu)/k_B T}$ | $n(\varepsilon) = \frac{1}{e^{(\varepsilon-\mu)/k_B T} - 1}$ | $n(\varepsilon) = \frac{1}{e^{(\varepsilon-\mu)/k_B T} + 1}$ |

- 当  $\varepsilon - \mu \gg k_B T$  成立，玻色-爱因斯坦统计和费米-狄拉克统计都趋向经典统计，即麦克斯韦-玻尔兹曼统计，即经典近似条件。

# 费米-狄拉克分布

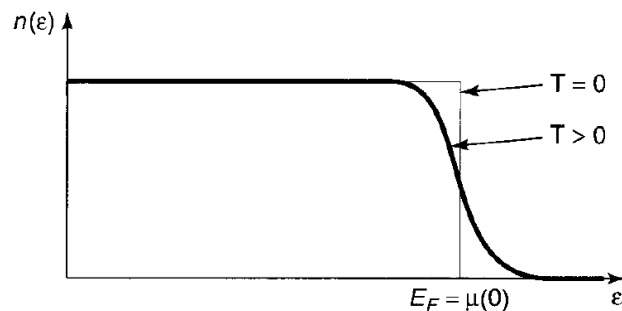
$$n(\varepsilon) = \frac{1}{e^{(\varepsilon-\mu)/k_B T} + 1}$$

费米-狄拉克分布在  $T \rightarrow 0$  时将会出现一种独特的现象

$$e^{(\varepsilon-\mu)/k_B T} = \begin{cases} 0, & \text{如果 } \varepsilon < \mu(0) \\ \infty, & \text{如果 } \varepsilon > \mu(0) \end{cases}$$

所以

$$n(\varepsilon) = \begin{cases} 1, & \text{如果 } \varepsilon < \mu(0) \\ 0, & \text{如果 } \varepsilon > \mu(0) \end{cases}$$



所有能量小于 $\mu(0)$ 的态都将被占据，能量大于 $\mu(0)$ 的态都未被占据。很显然，化学势在绝对零度时就是费米能

$$E_F = \mu(0)$$

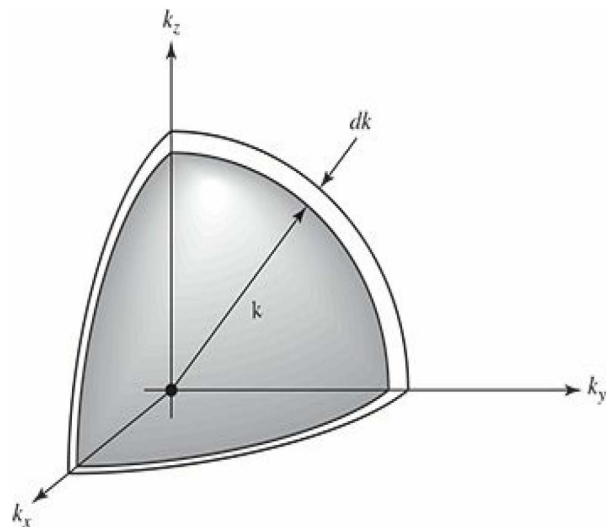
# 费米面与费米能级

费米面以下的能量状态数为

$$n(E_F) = N = 2 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{4}{3} \pi k_F^3 \cdot \frac{V}{\pi^3} = \frac{L^3}{3\pi^2} \left( \frac{2mE_F}{\hbar^2} \right)^{3/2}$$

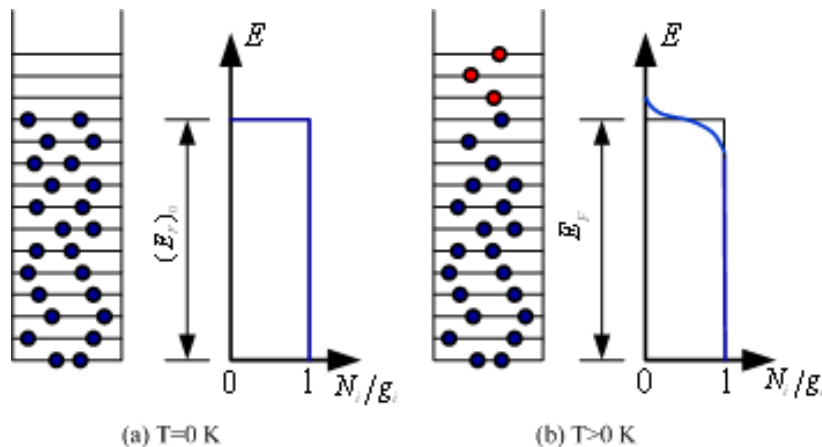
所以

$$E_F = \frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{3\pi^2 N}{V} \right)^{2/3}$$



# 金属银

以金属银为例可以通过费米-狄拉克分布计算出电子的费米能级为5.4eV。在绝对零度时，能量从0到5.4eV的各量子态都被电子占满，说明哪怕在绝对零度时，也并非所有电子都在最低能态上，这正是泡利原理的结果。



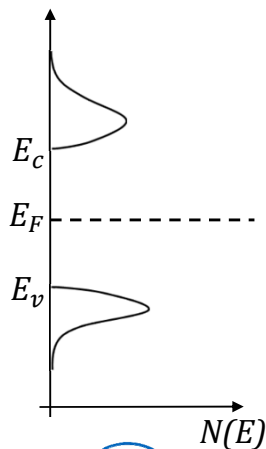
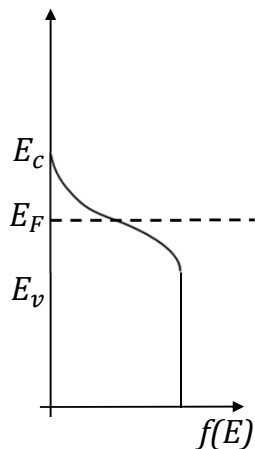
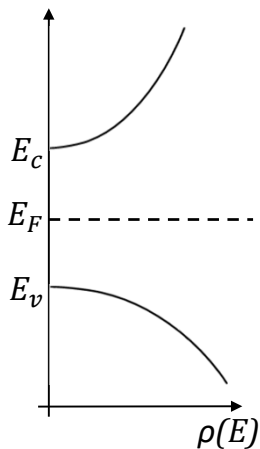
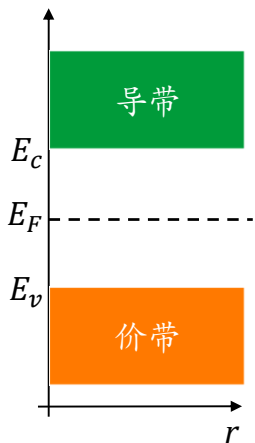
# 能态密度

由于小于任意能量值的能态数量已知

$$n(E) = \frac{L^3}{3\pi^2} \left( \frac{2mE}{\hbar^2} \right)^{3/2}$$

可以导出能态密度的表达式

$$\rho(E) = \frac{dn(E)}{VdE} = \frac{1}{2\pi^2} \left( \frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} E^{1/2} = \frac{3}{2} \frac{N}{V} \frac{E^{1/2}}{E_F^{3/2}}$$



# 黑体光谱(1)

$$N_n = \frac{d_n}{e^{(\alpha + \beta E_n)} - 1}$$

- 光子（即电磁场的量子）是自旋为1的全同玻色子，但由于光子没有质量，本质上是相对论性的，使它比较奇特：
  - 一个光子的能量与它的频率满足普朗克方程  $E = h\nu = \hbar\omega$ 。
  - 波数  $k$  和其频率满足  $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c}$ 。
  - 只有两个自旋态存在（量子数  $m$  可以为 $\pm 1$ ，但不能为0）。
  - 光子数不是守恒量。当温度升高时，单位体积中的光子数将增加。

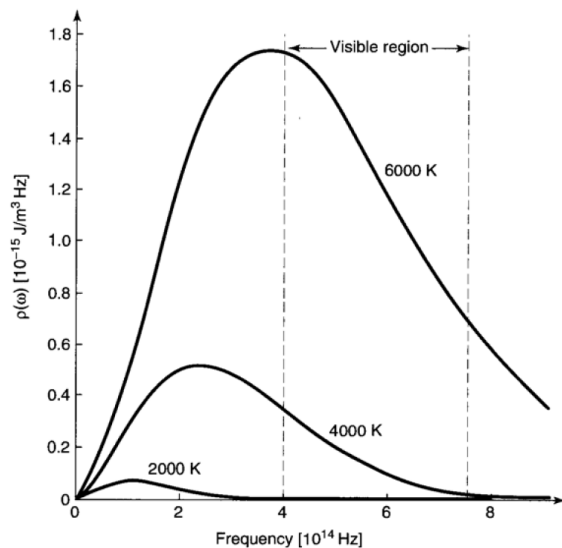
以上情况下，粒子数条件将不再适用，我们可令  $\alpha \rightarrow 0$ ，因此

$$n(\omega) = \frac{d_k}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1}$$



# 黑体光谱(2)

$$n(\omega) = \frac{d_k}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1}$$



对于处于体积为  $V$  的盒子中的自由光子，考虑到两个自旋方向

$$d_k = \frac{V}{\pi^2 c^3} \omega^2 d\omega$$

所以

$$\rho(\omega)d\omega = \frac{n(\omega)\hbar\omega}{V} = \frac{\hbar\omega^3 d\omega}{\pi^2 c^3 (e^{\hbar\omega/k_B T} - 1)}$$

$$\rho(\omega) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3 (e^{\hbar\omega/k_B T} - 1)}$$

这就是著名的黑体辐射公式。

# 参考文献

---

- 三种统计分布主要参考：
  - 教材David J. Griffiths, Introduction to Quantum Mechanics (2nd Edition), Cambridge University Press (2018). 第5.4节（注意是该书第二版）。
  - 仲顺安等，理论物理导论（第3版），北京理工大学出版社。第14章的内容。
- 自由电子气模型可以参考：
  - 教材David J. Griffiths, and Darrell F. Schroeter, Introduction to Quantum Mechanics (3rd Edition), Cambridge University Press (2018). 第5.3.1节。
- 能量均分定理可以参考
  - 仲顺安等，理论物理导论（第3版），北京理工大学出版社。第14章的内容。



## C5-5 光子计数与泊松统计

# 课程回顾

## 统计分布和黑体光谱：

- 微观粒子的三种统计分布：麦克斯韦-玻尔兹曼统计、玻色-爱因斯坦统计、费米-狄拉克统计。

|      | 麦克斯韦-玻尔兹曼统计                                     | 玻色-爱因斯坦统计                                                    | 费米-狄拉克统计                                                     |
|------|-------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------|
| 分布函数 | $n(\varepsilon) = e^{-(\varepsilon-\mu)/k_B T}$ | $n(\varepsilon) = \frac{1}{e^{(\varepsilon-\mu)/k_B T} - 1}$ | $n(\varepsilon) = \frac{1}{e^{(\varepsilon-\mu)/k_B T} + 1}$ |

- 在经典近似条件 $\varepsilon - \mu \gg k_B T$ 下，玻色-爱因斯坦统计和费米-狄拉克统计趋近于麦克斯韦-玻尔兹曼统计。
- 费米-狄拉克分布和能态密度相结合可以解释固体能带中电子的分布规律。
- 玻色-爱因斯坦分布可以解释黑体的辐射光谱。



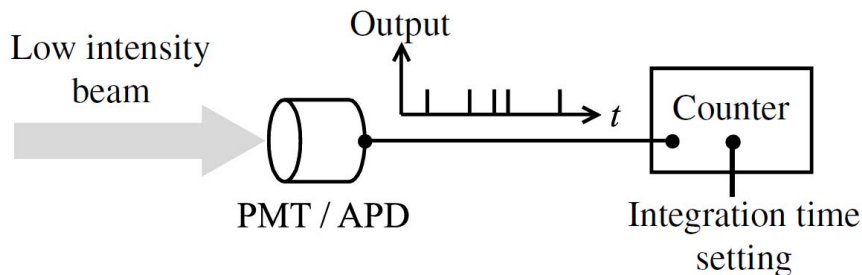
# 量子测量

---

- 大量自由粒子的统计规律可以由三种统计分布来描述。但对于量子力学而言，更具挑战性的是研究和建立少数粒子也就是真正量子层面的单粒子统计规律和测量方式。这也是第一次量子革命和第二次量子革命的显著区别之一。
- 量子测量不同于一般经典力学中的测量：（1）量子测量不是独立于所观测的物理系统而单独存在的，相反，测量本身即是物理系统的一部分，会对系统的状态产生干扰；（2）处于相同状态的量子系统被测量后可能得到不同的结果，这些结果符合一定的概率分布；（3）非对易的两个可观测量无法同时测量。比较知名的例子是位置与动量，也可以透过海森堡不确定原理来描述。
- 量子测量根据测量对象数量的不同，可以分为局域测量、关联测量、联合测量等。

# 光子计数(1)

- 光电效应的解释能够在量子化原子能级的基础上进行。光的粒子性的真正确认要等到单光子反聚束效应（photon antibunching, Kimble, Dagenais and Mandel, 1977）和双光子干涉现象（two-photon interference, Hong, Ou, and Mandel, 1987）的实验验证。两者的基础都是光子计数。
- 考虑一束极弱的光入射到一个光子计数器上。光子计数器包含一个单光子探测器，比如光电倍增管（PMT）或者雪崩光电二极管（APD），和一个电子计数器。单光子探测器产生一个电压短脉冲，而电子计数器记录一段时间内的脉冲数量。



## 光子计数(2)

考虑一束单色的相干光线，角频率为  $\omega$ ，光强为  $I$ ，功率为  $P$ ，截面积为  $A$ ，定义光子速流  $\Phi$  为单位时间内经过单位截面的光子数

$$\Phi = \frac{IA}{\hbar\omega} \equiv \frac{P}{\hbar\omega}$$

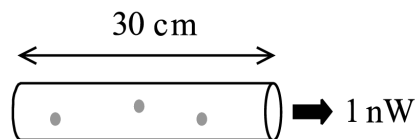
光子计数器的量子效率  $\eta$  为光子计数和入射光子总数之间的比例，所以在计数时间  $T$  内被计数器记录的平均光子数为

$$N(T) = \eta\Phi T = \frac{\eta PT}{\hbar\omega}$$

光子计数器一般具有一个最大计数，一般由单光子探测器的死区时间（dead time）所决定，也就是完成一个计数后，探测器恢复正常状态所需要的时间。比如死区时间1微秒，对应的最大计数为 $10^6$ 每秒。如果假设量子效率为10%，那么可计数光束的功率极限大约是 $\sim 10^{-12}\text{W}$ 。这是非常弱的光功率！



# 光子计数(3)



考虑氦氖激光器发出波长为633nm（对应的单光子能量为2eV）的红光，如果激光功率为1mW，并衰减 $10^6$ 倍。平均光子速流为：

$$\Phi = \frac{P}{\hbar\omega} = \frac{10^{-9}}{2.0 \times (1.6 \times 10^{-19})} = 3.1 \times 10^9$$

光的速度为 $3 \times 10^8$ m/s，考虑3米长的光束，平均会有31个光子，对应的光子计数时间为 $10^{-8}$ 秒。如果考虑更短的光子计数时间，比如1纳秒= $10^{-9}$ 秒，那么光子的数量会变成一个非整数3.1个光子，但光子计数必须是一个整数，如果测量多次，会得到类似于下面的结果

1, 6, 3, 1, 2, 2, 4, 4, 2, 3, 4, 3, 1, 3, 6, 5, 0, 4, 1, 1, 6, 2, 2, 6, 4, 1, 4, 3, 4, 6, ...

30次计数总共观测到大约95个光子。

如果计数时间更短，比如0.1纳秒= $10^{-10}$ 秒，平均每次测量会有0.31个光子，如果测量多次，会得到类似于下面的结果：

1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, ...

10次计数总共观测到大约3个光子。

全同粒子与统计

# 泊松统计(1)

- 由于光子的量子化特点，它的浮动范围遵循一定的统计规律。对于完美的相干光束（单色性非常理想的激光），由于光强和平均光子速流恒定，其遵循泊松光子统计。

考虑功率恒定为  $P$  的一束光，长度  $L$  内的平均的光子数为

$$\bar{n} = \Phi L / c$$

假设我们把  $L$  分成  $N$  段， $N$  是足够大的一个大数。对于长度  $L/N$  中发现一个光子的概率  $p = \bar{n}/N$  是非常小的，这种情况下在长度  $L/N$  上发现2个或者多个光子的概率可以忽略。现在的问题为在  $L$  上发现  $n$  个光子概率  $\mathcal{P}(n)$  是多大？

$$\mathcal{P}(n) = \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n (1-p)^{N-n} = \frac{N!}{n!(N-n)!} \left(\frac{\bar{n}}{N}\right)^n \left(1 - \frac{\bar{n}}{N}\right)^{N-n} = \frac{1}{n!} \left(\frac{N!}{(N-n)! N^n}\right) \bar{n}^n \left(1 - \frac{\bar{n}}{N}\right)^{N-n}$$

利用斯特林近似

$$\ln(N!) \approx N \ln(N) - N, \quad N \gg 1$$



## 泊松统计(2)

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \ln \left( \frac{N!}{(N-n)! N^n} \right) \right] = 0$$

所以

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \frac{N!}{(N-n)! N^n} \right] = 1$$

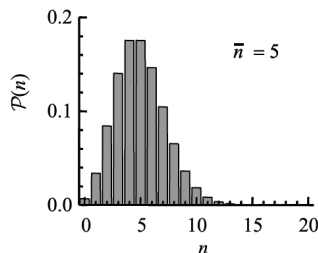
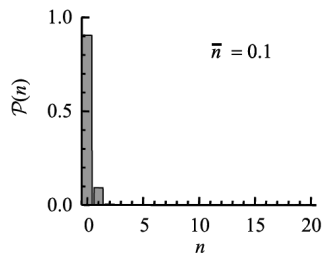
另外

$$\left( 1 - \frac{\bar{n}}{N} \right)^{N-n} = 1 - (N-n) \frac{\bar{n}}{N} + \frac{1}{2!} (N-n)(N-n-1) \left( \frac{\bar{n}}{N} \right)^2 - \dots \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 1 - \bar{n} + \frac{\bar{n}^2}{2!} - \dots = e^{-\bar{n}}$$

$$\mathcal{P}(n) = \frac{\bar{n}^n}{n!} e^{-\bar{n}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

光子的泊松统计公式

# 泊松统计(3)

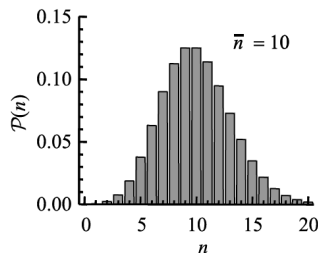
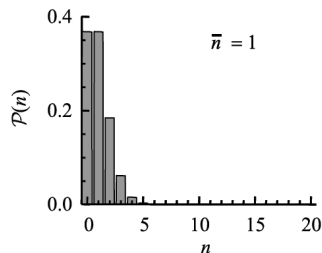


在泊松统计中，随着平均光子数增加，可能探测到的光子计数范围变得更加宽广。因此可以定义光子计数的变化量为标准方差的平方，即

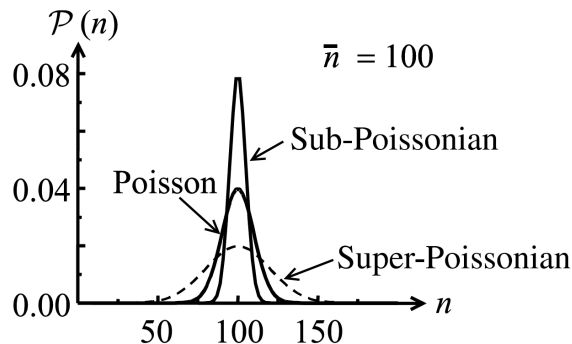
$$\text{Var}(n) \equiv (\sigma(n))^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (n - \bar{n})^2 \mathcal{P}(n) = \bar{n}$$

所以

$$\sigma(n) = \sqrt{\bar{n}}$$



# 光源的分类



- 光源的统计性质，根据是否满足泊松分布可以分为以下三类：
  - 亚泊松统计， $\sigma(n) < \sqrt{\bar{n}}$ ;
  - 泊松统计， $\sigma(n) = \sqrt{\bar{n}}$ ;
  - 超泊松统计， $\sigma(n) > \sqrt{\bar{n}}$ 。
- 超泊松分布代表着更宽的光子数分布，不难想象这代表着更为不稳定的光源。所以非激光的传统光源由于光强不稳定，会导致超泊松分布。
- 亚泊松分布代表着比完美激光更为稳定的光源，也被称为非经典光源，典型的代表是单光子源。

# 超泊松光源(1)

$$n(\varepsilon) = e^{-(\varepsilon - \mu)/k_B T}$$

超泊松光源的典型代表是热光源，也就是黑体辐射。考虑到每个频率的光都被量子化后

$$E_n(\omega) = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega$$

这些光子符合麦克斯韦-玻尔兹曼统计，得到  $n$  个光子的概率为

$$\mathcal{P}_\omega(n) = \frac{e^{(-E_n/k_B T)}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{(-E_n/k_B T)}} = \frac{e^{(-n\hbar\omega/k_B T)}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{(-n\hbar\omega/k_B T)}} = \frac{x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} x^n}$$

其中

$$x = e^{(-\hbar\omega/k_B T)}$$

当  $x < 1$  时，利用等差数列求和公式

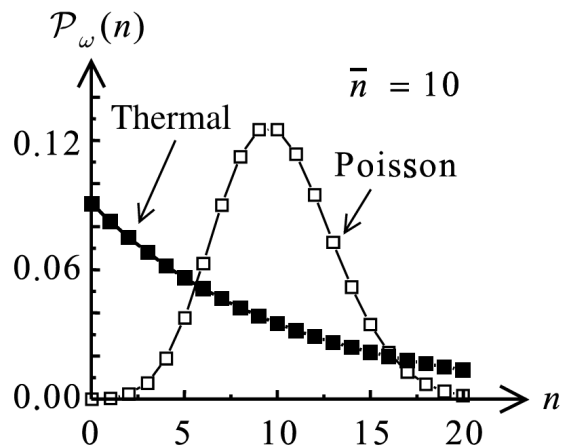
$$\mathcal{P}_\omega(n) = x^n(1 - x) = (1 - e^{(-\hbar\omega/k_B T)})e^{(-n\hbar\omega/k_B T)}$$

得到平均光子数表达式

$$\bar{n} = \sum_{n=0}^{\infty} n \mathcal{P}_\omega(n) = \sum_{n=0}^{\infty} n x^n (1 - x) = (1 - x) x \frac{d}{dx} \left( \sum_{n=0}^{\infty} x^n \right) = (1 - x) x \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{1 - x} \right) = \frac{x}{1 - x} = \frac{1}{e^{(\hbar\omega/k_B T)} - 1}$$



## 超泊松光源(2)



由于  $x = \bar{n}/(\bar{n} + 1)$ , 玻色-爱因斯坦分布可以写成

$$\mathcal{P}_\omega(n) = \frac{1}{\bar{n} + 1} \left( \frac{\bar{n}}{\bar{n} + 1} \right)^n$$

上式在  $n = 0$  时取极大值。

$$(\sigma(n))^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (n - \bar{n})^2 \mathcal{P}(n) = \bar{n} + \bar{n}^2 > \bar{n}$$

所以热光源符合超泊松统计。

但是, 考虑到热光源一般是多波长的

$$(\sigma(n))^2 = \bar{n} + \frac{\bar{n}^2}{N_m}$$

当  $N_m$  很大时, 在实际测量过程中由于很难保证单波长条件, 所以测得的结果往往符合泊松统计, 而不是超泊松统计。

# 超泊松光源(3)

$$\rho(\omega) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3 (e^{\hbar\omega/k_B T} - 1)}$$

爱因斯坦在1909年的时候分析了黑体辐射的能量波动为

$$\langle \Delta E^2 \rangle = k_B T^2 \frac{\partial \langle E \rangle}{\partial T}$$

这时在一个频率范围内的能量波动为

$$\langle \Delta E^2 \rangle d\omega = k_B T^2 \frac{\partial}{\partial T} (V\rho) d\omega = k_B T^2 V d\omega \frac{\partial \rho}{\partial T} = \left( \rho \hbar \omega + \frac{\pi^2 c^3}{\omega^2} \rho^2 \right) V d\omega$$

由于能量波动和频率范围内的光子数波动有关

$$\langle \Delta E^2 \rangle d\omega = g(\omega) d\omega \cdot \langle (\sigma(n) \hbar \omega)^2 \rangle \cdot V = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} (\sigma(n))^2 (\hbar \omega)^2 V d\omega$$

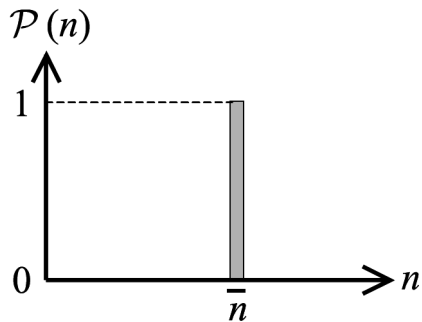
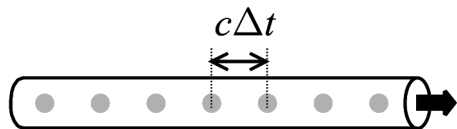
所以

$$(\sigma(n))^2 = \bar{n} + \bar{n}^2 = \frac{\pi^2 c^3}{\hbar \omega^3} \rho + \left( \frac{\pi^2 c^3}{\hbar \omega^3} \rho \right)^2$$

后面这项代表了电磁场的随机波动，也被称为波动噪声。



# 亚泊松光源(1)



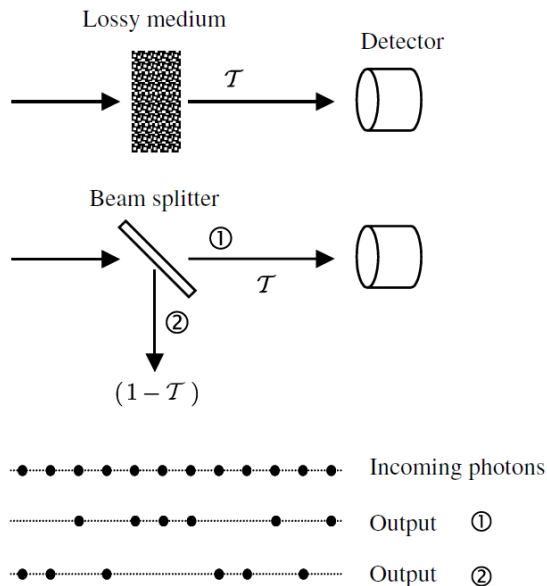
- 亚泊松光源满足  $\sigma(n) < \sqrt{\bar{n}}$ , 是超经典的, 因而没有经典对应光源的例子。

如果我们考虑一队光子等间距地出现, 间距满足  $\Delta x = c\Delta t$ , 因此  $T$  时间内的光子计数为

$$N(T) = \text{Int} \left( \eta \frac{T}{\Delta t} \right)$$

每次测量得到的结果都是一样的, 因此  $\bar{n} = N$  而且  $\sigma(n) = 0$ 。这也就是一个完美的单光子源。

## 亚泊松光源(2)



假设一个完美的单光子源发射的单光子经过一个光损媒介，如果这时光子的通过率是 $T$ ，那么光损媒介可以看作是一个 $T:1-T$ 的光分束器，也就是分束后的两路光中平均光子数的比例为 $T:1-T$ 。

由于光损（或者分束）是一个随机过程，所以实际的单光子源测试不可避免地偏离完美单光子源。造成光损的原因有：

- (1) 不充分的采集；
- (2) 光学元件引入的损耗，比如吸收，散射，反射等不完美过程；
- (3) 不完美的探测。

而这些都是不可避免的！因此单光子源是非常脆弱的光源。

# 参考文献

---

- 光子计数和泊松统计主要参考：
  - Mark Fox, Quntum Optics – An Introduction, Oxford University Press (2006). 第5章。



## C5-6 HBT实验与光子反聚束

# 课程回顾

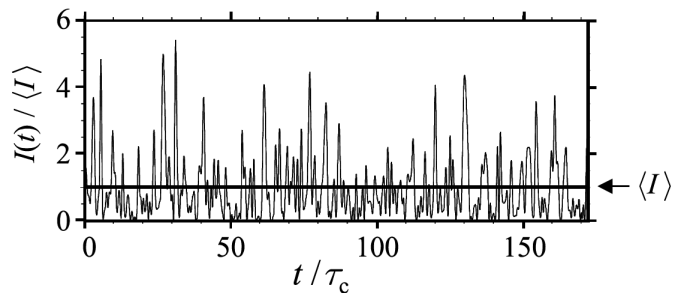
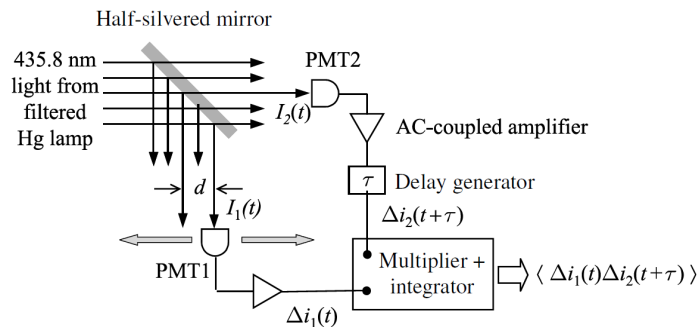
---

## 光子计数和泊松统计：

- 量子测量不同于一般经典力学中的测量：（1）量子测量不是独立于所观测的物理系统而单独存在的，相反，测量本身即是物理系统的一部分，会对系统的状态产生干扰；（2）处于相同状态的量子系统被测量后可能得到不同的结果，这些结果符合一定的概率分布；（3）非对易的两个可观测量无法同时测量。
- 由于光子的量子化特点，光子计数的波动范围遵循一定的统计规律。完美的相干光束（单色性非常理想的激光）遵循泊松光子统计。
- 超泊松光源的典型代表是热光源；亚泊松光源的典型代表是单光子源。



# HBT实验



- Hanbury Brown-Twiss实验简称HBT实验，是一种检验光场强度相关性的实验方法，最初用于改善双星系统测试的角分辨率。
- 来自经典光源的光线被分束器分为两束，分别被光电探测器接收。将其中一路信号延迟  $\tau$  后，两路信号经过乘法器并取时间平均得到  $\langle \Delta I(t) \Delta I(t + \tau) \rangle$
- 考虑光线本身的相干时间为  $\tau_c$ ，当  $\tau \gg \tau_c$  时
 
$$\langle \Delta I(t) \Delta I(t + \tau) \rangle_{\tau \gg \tau_c} = 0$$
- 如果两路信号的延迟为0，则
 
$$\langle \Delta I(t) \Delta I(t + \tau) \rangle_{\tau=0} = \langle \Delta I(t)^2 \rangle$$

## 二阶关联函数(1)

根据HBT实验，我们定义二阶关联函数  $g^{(2)}(\tau) = \frac{\langle I(t)I(t+\tau) \rangle}{\langle I(t) \rangle \langle I(t+\tau) \rangle}$

一般情况下光场的平均强度随时间不变， $\langle I(t) \rangle = \langle I(t+\tau) \rangle$ 。

分离出光场强度中的时间相关项  $I(t) = \langle I \rangle + \Delta I(t)$ 。由于  $\langle \Delta I(t) \rangle = 0$ ，对于  $\tau \gg \tau_c$

$$\begin{aligned}\langle I(t)I(t+\tau) \rangle_{\tau \gg \tau_c} &= \langle (\langle I \rangle + \Delta I(t))(\langle I \rangle + \Delta I(t+\tau)) \rangle \\ &= \langle I \rangle^2 + \langle I \rangle \langle \Delta I(t) \rangle + \langle I \rangle \langle \Delta I(t+\tau) \rangle + \langle \Delta I(t) \Delta I(t+\tau) \rangle = \langle I \rangle^2\end{aligned}$$

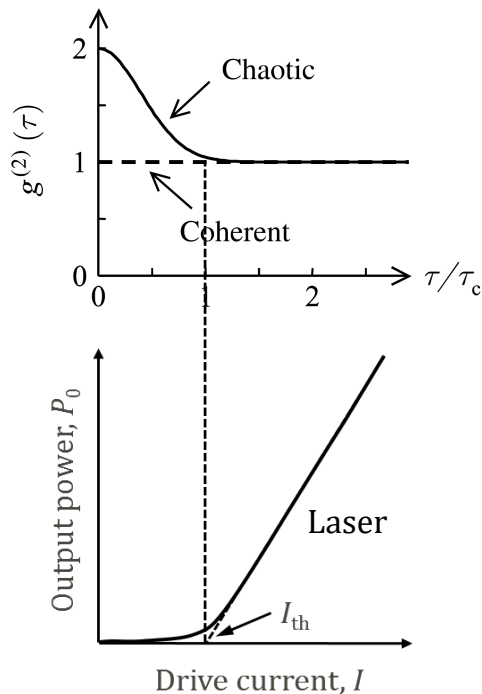
所以

$$g^{(2)}(\tau \gg \tau_c) = \frac{\langle I(t)I(t+\tau) \rangle}{\langle I(t) \rangle^2} = \frac{\langle I(t) \rangle^2}{\langle I(t) \rangle^2} = 1$$

对于  $\tau = 0$

$$g^{(2)}(0) = \frac{\langle I(t)I(t) \rangle}{\langle I(t) \rangle^2} = \frac{\langle I(t)^2 \rangle}{\langle I(t) \rangle^2}$$

## 二阶关联函数(2)



一般情况下  $g^{(2)}(0) \geq 1$        $g^{(2)}(0) \geq g^{(2)}(\tau \gg \tau_c)$

对于完美的相干光源（单色性很好的激光）

$$g^{(2)}(\tau) = \frac{\langle I(t)I(t+\tau) \rangle}{\langle I(t) \rangle^2} = \frac{I_0^2}{I_0^2} = 1$$

对于不同线型的混乱光源（chaotic light），比如高斯线型的光源

$$g^{(2)}(\tau) = 1 + e^{-\pi(\tau/\tau_c)^2}$$

或者洛伦兹线型的光源

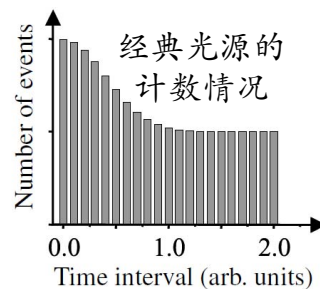
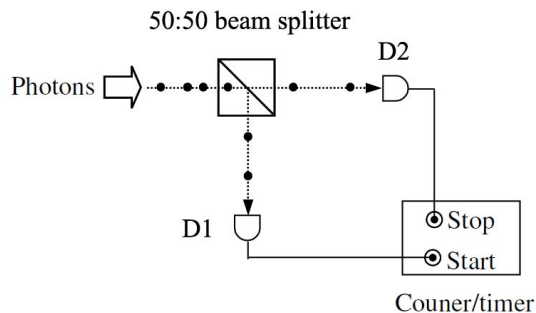
$$g^{(2)}(\tau) = 1 + e^{-2|\tau|/\tau_0}$$

以上两种光源都满足

$$g^{(2)}(0) = 2$$

# 非经典光源

- 考虑光子场景下的HBT实验设备。光电探测器将被单光子探测器所取代。一队光子通过50:50的分束器被平分为两队光子，分别被单光子探测器D1和D2所探测，并连接到光子计数器上。光子计数器会记录每个计数的时间，以及计数之间的时间差。
- 二阶关联函数在光子数表象下为
$$g^{(2)}(\tau) = \frac{\langle n_1(t)n_2(t+\tau) \rangle}{\langle n_1(t) \rangle \langle n_2(t+\tau) \rangle}$$
- 对于非经典光源，比如单光子源，由于D1发生计数时，D2不发生计数，或者反之（单个光子通过分束器只能出现在某一路），满足 $g^{(2)}(0) = 0$ 。



# 光子聚束与反聚束

| Classical description | Photon stream | $g^{(2)}(0)$ |
|-----------------------|---------------|--------------|
| Chaotic               | Bunched       | $>1$         |
| Coherent              | Random        | $1$          |
| None                  | Antibunched   | $<1$         |

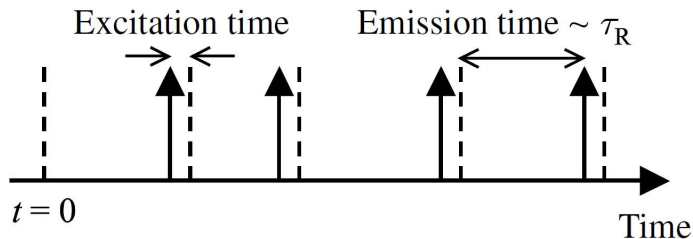
- 根据光源的统计性质，可分为超泊松统计，泊松统计和亚泊松统计三类，大致对应于三类聚束性质（为何不是完全对应？）：
  - a. 聚束光源， $g^{(2)}(0) > 1$ ；
  - b. 相干光源， $g^{(2)}(0) = 1$ ；
  - c. 反聚束光源， $g^{(2)}(0) < 1$ 。
- 注意：存在损耗介质的情况下，虽然单光子源的亚泊松统计会被削弱，但不会改变其反聚束的特征。为什么？
- 在实验中的单光子源经过长时间积分，可以较为准确地测得 $g^{(2)}(0)$ 。



# 光子反聚束实验(1)

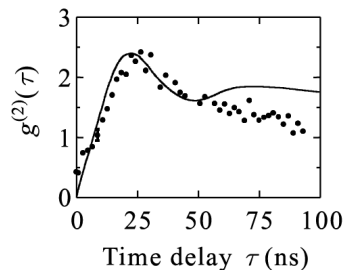
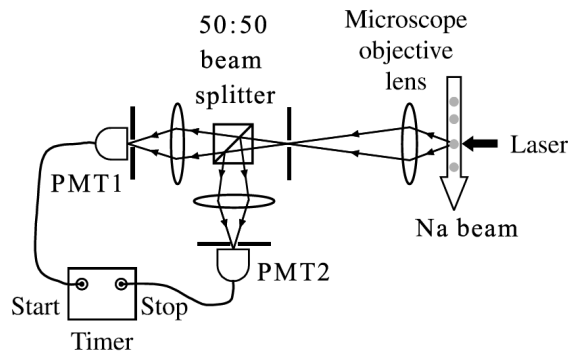


- 1977年, Jeff Kimble等人实现了第一个单光子反聚束实验。
- 实验基于电子在原子能级间跃迁导致的发光。由于每次泵浦原子后, 电子的跃迁只能发出一个光子, 因而具有光子反聚束的特点。
- 光子反聚束实验实际上是第一个只能用量子理论解释的量子光学实验。

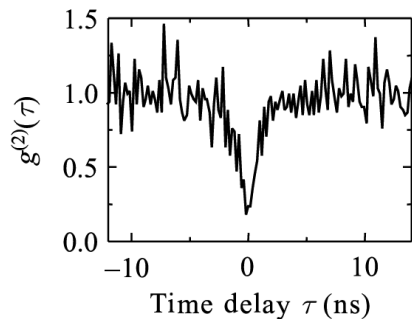
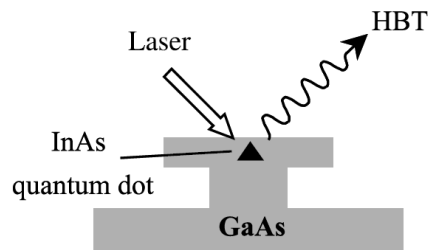


## 光子反聚束实验(2)

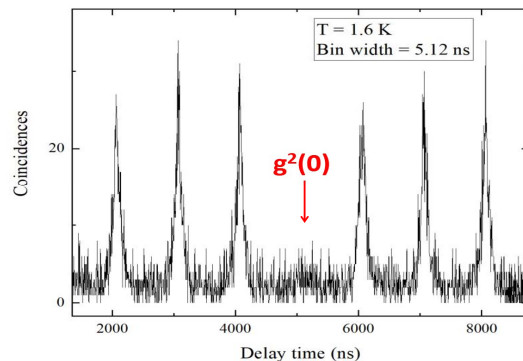
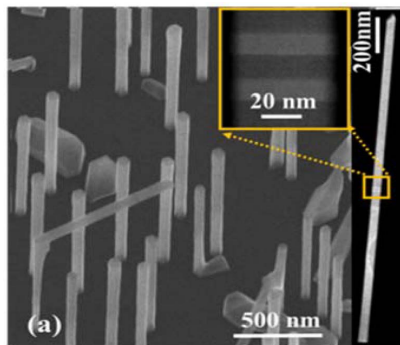
- 在实验中，一束激光照射到Na原子队列上，确保每次只有1-2个Na原子发光。Na原子发光被收集起来，通过50:50的分束器后，分别被两个光电倍增管所探测。
- 明显的 $g^{(2)}(0) \approx 0.4 < 1$ 被实验观测到了。但是在当时的实验条件下，由于很难保证每次只有一个Na原子被照射后发光，所以 $g^{(2)}(0) \neq 0$ 。



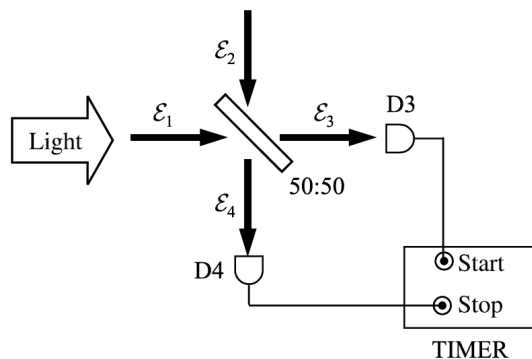
# 光子反聚束实验(3)



- 在后来的研究中，光子反聚束实验在下述固态物质体系中成功实现：
  - a. 染料分子发光；
  - b. 半导体量子点发光；
  - c. 金刚石中色心发光。



# HBT实验的量子描述(1)



- 无论使用经典还是量子的处理，二阶关联函数 $g^{(2)}(0)$ 都是一个非常突出的判据，可以在粒子的统计性质上区分经典光源和非经典光源。在量子处理中，乘法器被简化为一个光子计数器，用来记录光子计数事件的相关性。
- 在谐振子模型中，我们定义了粒子数表象下光子的产生和消灭算符，因此我们可以尝试建立HBT实验和二阶关联函数的量子理论。
- 把分束器前后的光场 $\mathcal{E}_1$ ,  $\mathcal{E}_2$ ,  $\mathcal{E}_3$ ,  $\mathcal{E}_4$ 看作是量子化的，在粒子数表象下，分别为 $n_1$ ,  $n_2$ ,  $n_3$ ,  $n_4$ 。探测器分别定义为 $D_3$ 和 $D_4$ 。

# HBT实验的量子描述(2)

$$a_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}(\mp ip + m\omega x)$$

在粒子数表象下，二阶关联函数可以定义为

$$g^{(2)}(\tau) = \frac{\langle n_3(t)n_4(t+\tau) \rangle}{\langle n_3(t) \rangle \langle n_4(t+\tau) \rangle}$$

$n_3$ 和 $n_4$ 是被探测器 $D_3$ 和 $D_4$ 分别记录的光子计数事件， $\langle \dots \rangle$ 代表多次测量后的平均值。将二阶关联函数写为产生消灭算符的形式

$$g^{(2)}(\tau) = \frac{\langle a_3^+(t)a_4^+(t+\tau)a_4(t+\tau)a_3(t) \rangle}{\langle a_3^+(t)a_3(t) \rangle \langle a_4^+(t+\tau)a_4(t+\tau) \rangle}$$

对于 $\tau = 0$ ,

$$g^{(2)}(0) = \frac{\langle a_3^+a_4^+a_4a_3 \rangle}{\langle a_3^+a_3 \rangle \langle a_4^+a_4 \rangle}$$

光场强度满足  $\begin{cases} \varepsilon_3 = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)/\sqrt{2} \\ \varepsilon_4 = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)/\sqrt{2} \end{cases}$

所以  $\begin{cases} a_3 = (a_1 - a_2)/\sqrt{2} \\ a_4 = (a_1 + a_2)/\sqrt{2} \end{cases}$



# HBT实验的量子描述(3)

考虑到入射光场波函数为 $|\Psi\rangle = |\psi_1, 0_2\rangle$ ，所以

$$\begin{aligned}\langle a_3^\dagger a_3 \rangle &= \langle \psi_1, 0_2 | (a_1^\dagger - a_2^\dagger)(a_1 - a_2)/2 | \psi_1, 0_2 \rangle = \langle \psi_1, 0_2 | a_1^\dagger a_1 - a_1^\dagger a_2 - a_2^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2 | \psi_1, 0_2 \rangle / 2 \\ &= \langle \psi_1 | a_1^\dagger a_1 | \psi_1 \rangle / 2 = \langle \psi_1 | n_1 | \psi_1 \rangle / 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle a_4^\dagger a_4 \rangle &= \langle \psi_1, 0_2 | (a_1^\dagger + a_2^\dagger)(a_1 + a_2)/2 | \psi_1, 0_2 \rangle = \langle \psi_1, 0_2 | a_1^\dagger a_1 + a_1^\dagger a_2 + a_2^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2 | \psi_1, 0_2 \rangle / 2 \\ &= \langle \psi_1 | a_1^\dagger a_1 | \psi_1 \rangle / 2 = \langle \psi_1 | n_1 | \psi_1 \rangle / 2\end{aligned}$$

同理有

$$\begin{aligned}\langle a_3^\dagger a_4^\dagger a_4 a_3 \rangle &= \langle \psi_1, 0_2 | (a_1^\dagger - a_2^\dagger)(a_1^\dagger + a_2^\dagger)(a_1 + a_2)(a_1 - a_2) | \psi_1, 0_2 \rangle / 4 \\ \langle a_3^\dagger a_4^\dagger a_4 a_3 \rangle &= \langle \psi_1 | a_1^\dagger a_1^\dagger a_1 a_1 | \psi_1 \rangle / 4\end{aligned}$$

由于

$$a_1^\dagger a_1^\dagger a_1 a_1 = a_1^\dagger (a_1 a_1^\dagger - 1) a_1 = a_1^\dagger a_1 a_1^\dagger a_1 - a_1^\dagger a_1 = n_1(n_1 - 1)$$

$$\langle a_3^\dagger a_4^\dagger a_4 a_3 \rangle = \langle \psi_1 | n_1(n_1 - 1) | \psi_1 \rangle / 4$$

# HBT实验的量子描述(4)

二阶关联函数可以化简为

$$g^{(2)}(0) = \frac{\langle a_3^+ a_4^+ a_4 a_3 \rangle}{\langle a_3^+ a_3 \rangle \langle a_4^+ a_4 \rangle} = \frac{\langle \psi_1 | n_1 (n_1 - 1) | \psi_1 \rangle / 4}{\langle \psi_1 | n_1 | \psi_1 \rangle^2 / 4} = \frac{\langle n(n-1) \rangle}{\langle n \rangle^2}$$

其中 $n$ 为入射光束的光子数

$$g^{(2)}(0) = \frac{n(n-1)}{n^2}$$

对于单光子源 $n = 1$ , 所以 $g^{(2)}(0) = 0$ 。

# 参考文献

---

- HBT实验和单光子反聚束主要参考
  - Mark Fox, Quntum Optics – An Introduction, Oxford University Press (2006). 第6章。
- HBT实验的量子表述主要参考
  - Mark Fox, Quntum Optics – An Introduction, Oxford University Press (2006). 第8.5节。



## 第五章小结

- 量子力学认为：全同粒子具有不可区分性，因此双粒子哈密顿量具有交换不变性。在哈密顿量交换不变的前提下，双粒子波函数分为对称和反对称两种情况，分别对应于玻色子和费米子。
- 等概率原理告诉我们，处于统计平衡状态的孤立系统，其所有可能出现的微观态出现的概率是相等的。而在量子力学，全同粒子不可区分，两粒子互换后，与原状态没有区别，不表示新的微观态。微观态计数方法的不同，是经典统计和量子统计的重大区别。
- 微观粒子的三种统计分布：麦克斯韦-玻尔兹曼统计、玻色-爱因斯坦统计、费米-狄拉克统计。

|      | 麦克斯韦-玻尔兹曼统计                                     | 玻色-爱因斯坦统计                                                    | 费米-狄拉克统计                                                     |
|------|-------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------|
| 分布函数 | $n(\varepsilon) = e^{-(\varepsilon-\mu)/k_B T}$ | $n(\varepsilon) = \frac{1}{e^{(\varepsilon-\mu)/k_B T} - 1}$ | $n(\varepsilon) = \frac{1}{e^{(\varepsilon-\mu)/k_B T} + 1}$ |

- 由于光子的量子化特点，光子计数的波动范围遵循一定的统计规律。完美的相干光束（单色性非常理想的激光）遵循泊松光子统计。
- HBT实验（光子反聚束实验）是一种检验光场强度二阶相关性的实验方法，经常用来区分经典光源和非经典光源。也是第一个只能用量子理论解释的量子光学实验。

